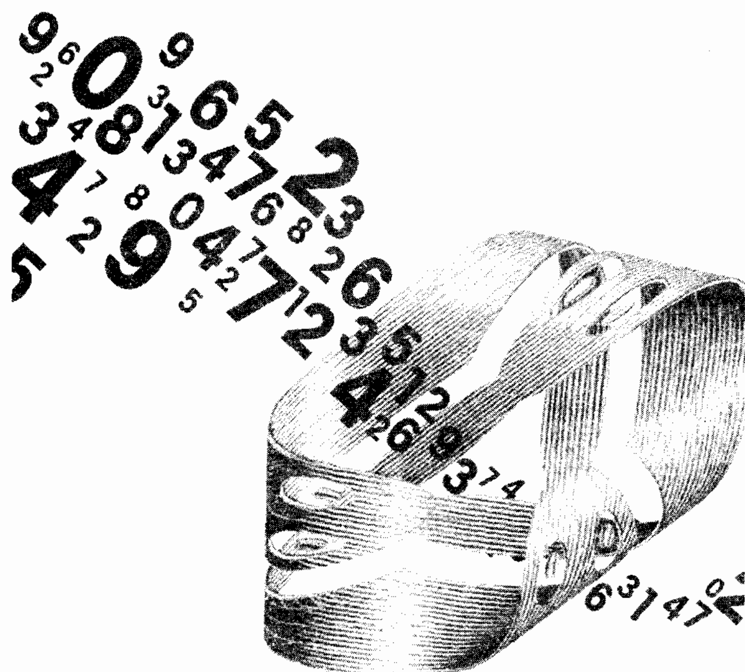
数学圈丛书

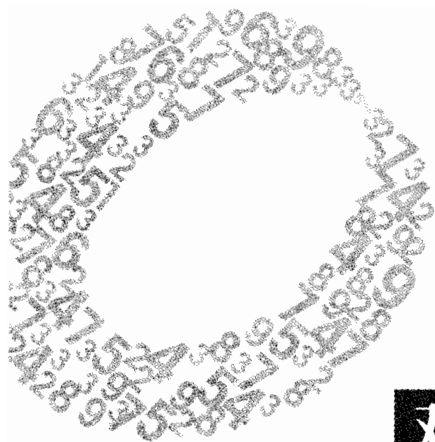
数学圈 1

In Mathematical Circles

【美】H·W·伊弗斯/著　李　泳/译



湖南科学技术出版社



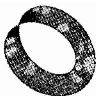
欢迎你来数学圈

欢迎你来数学圈，那是我们熟悉而陌生的园地。

我们熟悉它，因为几乎每个人都走过多年的数学路，从123走到6月6（或7月7），从课堂走进考场。然后，我们把它留给最后一张考卷，解放的头脑，不再为它留一点儿空间。我们也陌生，模糊的记忆里，是残缺的公式和零乱的图形，是课堂的催眠曲，是考场的蒙汗药……去吧，那些被课本和考卷异化和扭曲了的数学；忘记那一朵朵恶之花，我们会迎来新的百花园。

“数学圈丛书”请大家走进数学圈，也走近数学圈子里的人。这是一套新视角下的数学读物，它不为专门传达任何具体的数学知识和解题技巧，而以“非数学的形式来普及数学”，着重宣扬数学和数学家的思想和精神。它的目的不是教人学数学，而是改变人们对数学和数学家的看法，让数学融入大众文化，回到人们的生活。读这些书不需要智力竞赛的紧张，而是要一点儿文艺欣赏的平和。你可以怀着360样心情来享受数学，经历它的趣味和生命，感悟符号背后的情感和人生。

没有人怀疑数学是文化的一部分，但诺大的“文化”，却往往将数学排除在外。当然，从人数来看，数学家在文

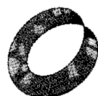


化人中顶多占一个测度为零的空间。但是，数学的每一点进步都影响着整个文明的根基。借一个历史学家的话说，“有谁知道，在微积分和路易十四时期的政治的朝代原则之间，在古典的城邦和欧几里得几何之间，在西方油画的空间透视和以铁路、电话、远距离武器制胜空间之间，在对位音乐和信用经济之间，原有深刻的一致关系呢?”（斯宾格勒《西方的没落·导言》）所以，数学不在象牙塔，就在身边。上帝用混乱的语言摧毁了石头的巴比塔，而人类用同一种语言建造了精神的巴比塔，那就是数学。它是艺术，也是生活;是态度,也是信仰;是最复杂的简单,也是最单纯的完美。

数学是生活。当然，我们的意思不是说生活离不开算术，技术离不开微积分；而是说数学本身也能成为大众的生活态度和生活方式。很多人感觉数学枯燥无味，是因为他把数学从生活中赶走了。当你发现一个小公式也像一首小诗那么多情的时候，还忍心把它忘记吗？大家能享受“诗意的生活”，从这点说，数学是一样的。

数学的生活很简单。如今流行着很多深藏“大道理”的小故事，那些道理多半取决于讲道理的人的态度和立场。它们是多变的，因为多变而被随意扭曲，因为扭曲而成为多样选择的理由。在所谓“后现代”的今天，似乎一切东西都成为多样的，人们像浮萍一样漂荡在多样选择的迷雾里，起码的追求也失落在“和谐”的“中庸”里。数学能告诉我们，多样的背后存在统一，极端才是和谐的源泉和基础。从某种意义说，数学的精神就是追求极端，它永远选择最简的、最美的，当然也是最好的。数学决没有圆滑的道理，也不为模糊的借口留下一点儿空间。

数学生活也浪漫。很多人怕数学抽象，却喜欢抽象的绘画和怪诞的文学。可见抽象不是数学的罪过。艺术家的想象力令人羡慕，而数学家的想象力更多。希尔伯特说过，如果哪个数学家一旦改行做了小说家（真的有），我们不要惊奇——因为那人缺乏足够的想象力做数学家，却足够做一个小说家。懂一点儿数学的



伏尔泰也感觉，阿基米德头脑的想象力比荷马的多。我们认为艺术家最有想象力，那是因为我们自己太缺乏想象力。

数学是明澈的思维。生活里的许多巧合——那些常被有心或无心地异化为玄妙或骗术法宝的巧合，也许只是自然而简单的数学结果。以数学的眼光来看生活，不会有那么多的模糊。有数学精神的人多了，骗子（特别是那些穿戴着科学衣冠的骗子）的空间就小了。无限的虚幻能在数学找到最踏实的归宿，它们“如龙涎香和麝香，如安息香和乳香，对精神和感观的激动都一一颂扬。”（波德莱尔《恶之花·感应》）

数学是奇异的旅行。数学在某个属于它们自身的永恒而朦胧的地方，在那片朦胧的土地上，我们已经看到了三角形的三个内角和等于180度，三条中线总是交于一点而且三分每一条中线；在那片朦胧的土地上，还存在着无数更令人惊奇的几何图形和数字的奇妙，等着我们去和它们相遇。

数学是纯美的艺术。数学家像画家和诗人，都创造“模式”，不过是用思想来创造，用符号来表达。数学的思想，就像画家的色彩和诗人的文字，以和谐的方式组织起来。数学的世界里没有丑陋的位置。在数学家的眼里，自己笔下的公式和符号就像希腊神话里的那位塞浦路斯国王，从自己的雕像看到了爱人的生命。在数学里，在那比石头还坚硬的逻辑里，真的藏着数学家们的美的追求，藏着他们的性情和生命。

数学是精神的自由。惟独在数学中，人们可以通过完全自由的思想达到自我的满足。不论王摩诘的“雪地芭蕉”还是皮格马利翁（Pygmalion）的加拉提亚（Galatea），都能在数学中找到。数学没有任何外在的约束，约束数学的还是数学。

数学是永不停歇的人生。学数学的感觉就像在爬山，为了寻找新的山峰不停地去攀爬。当我们对寻找新的山峰不再感兴趣，生命也就结束了。

不论你是不是知道一点儿（或很多）数学，都可以走进数学圈，孔夫子说了，“知之者不如好之者，好之者不如乐之者。”



只要“君子乐之”，就走进了一种高远的境界。王国维先生讲人生境界，是从“望极天涯”到“蓦然回首”，换一种眼光看，就是从无穷回到眼前，从无限回归有限。而真正圆满了这个过程的，就是数学。来数学圈走走，我们也许能唤回正在失去的灵魂，找回一个圆满的人生。

1939年12月，怀特海在哈佛大学演讲《数学与善》中说，“因为有无限的主题和内容，数学甚至现代数学，也还是处在婴儿时期的学问。如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思想的新特点就是数学理解占统治地位。”这个想法也许浪漫，但他期许的年代似乎太过久远——他自己曾估计，一个新的思想模式渗透进一个文化的核心，需要1000年——我们的希望是，这个过程会快一点儿，更快一点儿。

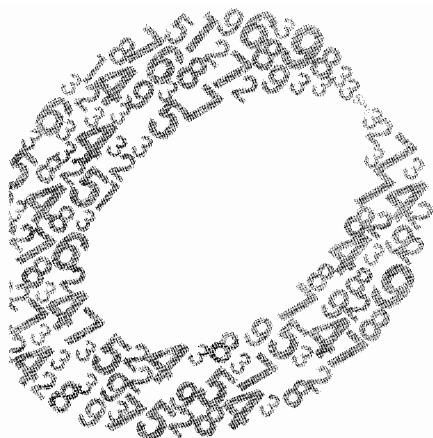
最后，我们借从数学家成为最有想象力的作家的卡洛尔笔下的爱丽思和那只著名的“柴郡猫”的一段充满数学趣味的对话，来总结我们的数学圈旅行：

“你能告诉我，我从这儿该走哪条路吗?”
“那多半儿要看你想去哪儿。”猫说。
“我不在乎去哪儿——”爱丽思说。
“那么你走哪条路都没关系，”猫说。
“——只要能到个地方就行，”爱丽思解释。
“噢，当然，你总能到个地方的，”猫说，“只要你走得够远。”

我们的数学圈没有起点，也没有终点，不论怎么走，只要走得够远，你总能到某个地方的。

李泳

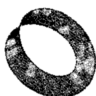
2006年8月



中译本序

现在流行一句话，世界是平的。这原是物理概念，也是数学结论。借这句卖出去的话来说，数学是圆的，能把什么都圈进来了，而不单是问题、定理和公式。这也是本书不同于其他"方"数学读物的地方。

《数学圈》是一系列轻松愉快的精神旅行，包括《走进数学圈》（原分上下卷）、《重游数学圈》、《相约数学圈》、《告别数学圈》和《回归数学圈》，原由 Prindle, Weber & Schmidt 在 1969 到 1987 年间陆续出版，前些年美国数学会将其合为三册，即我们现在看到的版本。编者伊弗斯（Howard Eves）是了不起的数学导师，"不论给中学生、大学生讲还是给数学老师讲，他总能令听众着迷。"同事们听了他的课，赞叹为"最迷人的演讲"。伊弗斯 1934 年在弗吉尼亚大学获学士学位，第二年为哈佛硕士，然后在普林斯顿大学继续学习，1948 年获俄勒冈州立大学数学博士学位。在普林斯顿，他认识了爱因斯坦，经常一起散步，从学校回家。路上有家杂货店，店里有冰激凌。有一次，爱因斯坦说那锥形的玩意儿挺好看，伊弗斯就给他买了一个。从此，他们每次经过都会买冰激凌。有一天，走到店门口时，爱因斯坦眼睛一亮，大声说，"看啦，今天我也带钱了!"当他把硬币放在柜台上时，伊弗斯赶紧拿出自



己的钱把它换了回来——那枚爱因斯坦硬币成为他后来的数学博物馆的第一件藏品。这个发生在作者身上的故事（据他在缅因州立大学的同事 Clayton Dodge 的回忆），表现了数学家的好奇、天真和快乐，这些品格时时流露在许多数学家的故事里，也代表着数学圈的精神。

20 世纪 40 年代以来，伊弗斯相继在纽约锡拉丘兹大学、普吉特湾大学和俄勒冈州立大学任教，1954 年到新成立的缅因州立大学，直到 1976 年退休。退休以后，他“像从美国最东的顶点滚下的石头”，从缅因州立大学的 Machias 和 Lubec 分校直到东南角的中佛罗里达大学。他一生写过 30 本书，200 多篇论文。两卷《几何考察》是他的权威著作，而两卷《数学的伟大时刻》是他关于数学历史的 43 个精彩演讲。我们把伊弗斯的履历写出来，是因为书中的许多故事就发生在他工作过的地方。同时也是为了纪念这位可敬的数学老师。其实他距离我们很近——三年前的今天，2004 年 6 月 6 日，93 岁的老人家才离开我们。

“圈”在这里的近 2000 个数学和数学家的故事，像出没在数学星空不同时空区域的星星，但我们很容易从它们组合出几个大的星座：数学史的、数学人的、数学娱乐的，还有数学幽默的。任何读者当然都能从这个星空发现乐趣，而在过去的几十年里，它还发挥了一样更特殊也许更重要的功能——正如出版者在前言里说的，“成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。”我们相信，这些星星同样能点缀我们的中小学数学课堂，让同学通过它们来经历数学的惊奇，感觉数学的魔力。

数学的第一个魔力是吸引我们的好奇心。很多历史人物（不单数学家）小时候都为欧几里得几何感到惊奇，他们惊奇什么？今天我们在几何课上还有多少惊奇？同样惊奇的还有那个大家都习惯了的“第五公设”——现代数学和物理学，至少有一半是从对它的好奇开始的。如果没有那一点好奇，今天我们大概



也不能说“世界是平的”。因为原始的好奇，欧几里得几何把生活和观察理性化了；因为思想的好奇，非欧几何从人类的纯粹理性中产生了；而它们与物理世界的“前定和谐”，似乎就是爱因斯坦说的世界上“最难理解的”事情，也是我们永远的好奇的源泉。

数学的第二个魔力来自一只看不见的手。想一个最简单的问题：一个物体在重力作用下从空间一点到另一点（两点不在同一垂线)，沿什么样的路径最节省时间？这是300年前的一个数学挑战，好奇的同学可以慢慢思考。从某种意义说，数学就是通过这个习题，伸出了它那只魔力的手，指引着万物运行的轨迹，也引出了一个绝妙的自然法则。大多数人并不需要学会如何挥动那只手，但如果知道有那样一只手，我们就能以更透明的眼光来看世界和自然，看到复杂的简单的和谐。

数学的第三个魔力在于它的人情味。孟夫子早就说过，“颂其诗，读其书，不知其人，可乎?”数学也不例外，也是“可以兴，可以观，可以群，可以怨”的，我们为什么不也怀着读诗的心情去认识它背后的人呢？每个人大概都能说出很多数学家的名字，不过那通常只是定理或公式的标签，并不能唤起对一个个有血肉的人物的联想。我们在这儿能遇见形形色色的古今人物，可爱的，可恨的，可乐的，可笑的，可悲的，可怜的，可敬的，可耻的……但“真正的数学家”（哈代的意思）似乎都很简单，有些还是被生活嘲弄的对象。其实他们本来也未必比别人聪明，只是靠了更多的无知换来那“一点”特别的聪明。我们可以看到，数学人比其他科学圈子里的人更像老子所谓的“建德若偷，质真若渝，大白若辱，大方无隅”。从这一点说，数学也是一门自我修养的工夫。一支笔，一张纸，“回也不改其乐”。有人问大数学家庞加莱如何才能像数学家一样思考，他回答说，“找一条倾斜的沙土小路，走上去，走下来，然后反复走上走下。数学思想就在脚底的摩擦中产生出来了。”简单地说，经常在自己的头脑里想想数学，则“鄙吝之心不复生矣!”

100 年前，法国《数学教育》杂志对数学家进行过一次问卷调查，第一个问题是“你什么时候开始对数学发生兴趣？”60%的回答在 11 岁到 18 岁之间。就是说，数学不一定要从很小的时候起步，很多数学家是从中学时代开始对数学发生兴趣的。如果我们今天的课堂能多一点兴趣，多一点人情味，也许能少扼杀几个未来的数学家吧？

最后说说译本。

原书是相隔 20 年的产物，故事来源（作者）众多，有时出现不同说法，与流行说法也不尽相同，正好互为补充。很多人物多次出现，背景介绍时有重复，译本也保留了；对不那么出名的数学家，我们多次在译名后保留了原文。很多不大流行的名词(地名、杂志、图书等)零星出现在不同的地方，译本也不厌重复地留下原文，以方便感兴趣的读者利用网络和工具书检索相关信息。

原书引用了许多文学作品片断，译者未能全部找原著来对照，因此片断的译文不一定符合原来作品的环境。好在作者的意图是从中看到一点数学趣味，这一点尽量保留了。

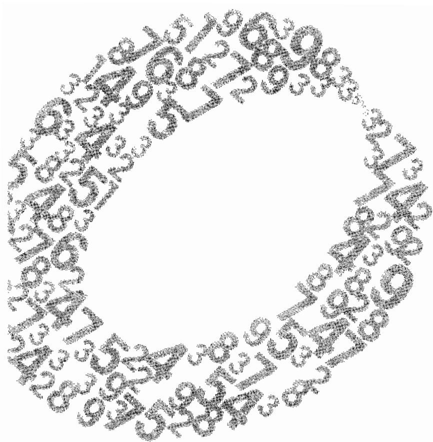
原书有不少带着数学家机敏的文字游戏（如打油诗、笑话、双关语等），有的完全是靠英文读音来表现的，如果译成中文，不但失去了原来的趣味和精神，中文也毫无意义。因此保留了原文，略加注释说明。它们是西方数学娱乐文化的一部分，也正好是课堂数学游戏的题目。

原书提及很多文化和教育背景，译本补充了一些注释和图片(原有的图片有编号，增加的图片没有编号)。图片主要来自一些名画和老照片，多数来源已无从考察。借作者在前言的话说，如果谁发现我们可能“偷”了他的作品，请求他原谅。

原书出现了一些德文、法文和西班牙文的句子，译者感谢张卜天、刘胜利、萧耐园、徐纪贵等先生的译文。

译者

2007 年 6 月 6 日

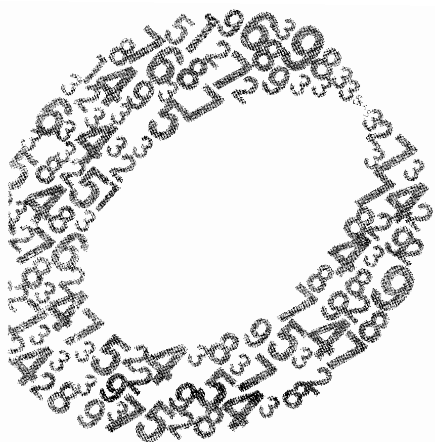


出版者的话

多年来，著名数学史家和数学导师霍华德·伊弗斯收集了大量数学和数学家的奇闻轶事，将它们汇编为六卷《数学圈》。成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。通过与伊弗斯教授特别商量，美国数学会（MAA）很高兴将六卷《数学圈》重新出版发行。

《走进数学圈》是最早的一卷，1969 年出版，赢得了一片喝彩。现在作为这个三卷本的第一卷。《重游数学圈》和《相约数学圈》合为第二卷,《告别数学圈》和《回归数学圈》合为第三卷。

这个三卷本《数学圈》全集一定能让你们快乐起来，所有的数学爱好者们，特别是那些欣赏数学人文和文化的人们。



目录

走进数学圈

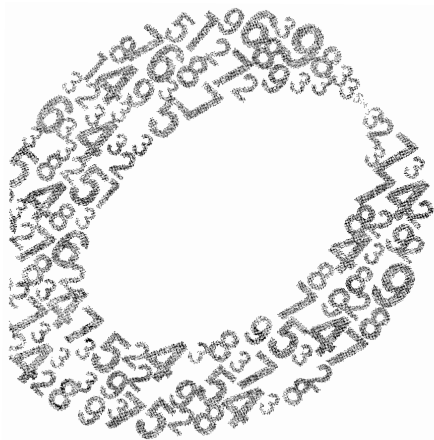


走进数学圈





限定在一定面积的曲折路径构成的古代迷宫，一步也不能走错，最后通向中心的一棵树或某个圣殿。这里画的是希腊神话中为人身牛头的吃人怪物米诺陶（Minotaur）建的迷宫。这个迷宫曾刻在克诺索斯（Cnossus）硬币上，它的样本如今已很难看到了。



前　言

不知什么原因，这些年里，我几乎没费多少特别的努力，就碰到了许多关于数学和数学家的奇闻轶事，而且一直萦绕在我的脑海。事实证明，这些小故事可以用在课堂上活跃气氛，给数学加一点儿娱乐的调味品，给它涂抹一点儿人文的色彩，激发同学的热情，缅怀伟大的创造者们的业绩，找回正在消失的兴趣，追寻文化历史的线索，同时也重温一些概念和思想。许多同学和老师都要我把这些奇闻轶事写出来，许多出版商也追着我讨要书稿。最后我还是放弃了，这儿奉献给大家的只是那些素材的一个样本。

一动笔就出问题了。首先，在组织材料时，我发现东西太多了，远远超过了一本中等篇幅的读物。于是，我决定选300到400个故事来试试读者的口味。接下来的问题是，如何编排材料。我决定大致以年代为序，并赋以一个指标，以便适合其他有用的分类方式。接着是某些材料的真实性问题。我决定不做过多的考证，而只是把可能存疑的故事摆出来，将其作为我们数学的众多有趣传说的一部分。

当然，这里讲的许多个人的故事都是实际发生过的，不过同样可以肯定的是，原先的某些真人真事经过长久的岁月已经改头换面了，还有些事情则纯粹是为了学科的需要而杜撰出来的。于是，有些流传到今天的伟人的故事，已经迷失在历史的迷雾中，我们找不出任何的真相；有些相同的故事，落在了不同人的身上；有些广为流传的趣事，被当事人否认了；还有很多基本情节相同的故事，在不同时间流传着相互矛盾的说法。我们想起了林肯，关于他有千百个故事和传说，许多有事实根据，但肯定也有不少是渲染、涂抹或杜撰的，那不过是为了突出林肯的个性色彩。

更困难的问题是关于当代人物的事情。在我收集的材料里有很多当代的故事，但我听说有的当事人已经否认了那些事情，或者至少表示对它们不感兴趣。因此，在这第一卷故事里，我只讲过去的，它们的主人公已经不可能站出来替自己辩护了；我也会约束自己，不讲一个活人的故事。

阅读这些故事，只需要一点儿数学背景，更多的时候是一点儿也用不着。不过时常也会出现个别苛刻的甚至令人生畏的初等数学难题。历史注记和摘要主要是根据我的《数学史引论》(Holt, Rinehart and Winston, third edition, 1969) 改编的，感兴趣的读者可以从那本书里找到更完整的历史记述。我非常感谢《数学教师》杂志（美国国家数学教师理事会的优秀官方刊物之一），允许我几乎原样重现发表在它的“历史记述”专栏的一些故事——我曾为那个专栏做过多年愉快的编辑工作。

我希望一般的读者能从这些什锦小菜品出好的滋味，老师能偶尔发挥它们的作用，而共享它们的学生能欣赏一段段历史的花絮、感受数学的“人情味”。

我怀着足够的勇气，决心在将来走遍“数学圈”，至少走近

它的现代部分。为了实现这个目标，我诚恳地请感兴趣的读者把你们最想看到的任何故事告诉我，把它们写进未来更大的故事集。

霍华德·伊弗斯

第一象限

从懂数学的乌鸦
到第一个女数学家

现实和想象的动物世界

在遥远的过去，智人还没出现的时候，地球上就已经有大大小小不同习性的动物。在这些生灵中间，谁有哪怕是一丁点儿的数学意识吗？根据今天许多动物行为专家们的观察，大量证据令我们相信，某些鸟儿和昆虫也许真有那样的本领。这结论还有争议，而且还有其他合理的解释。不过，蜘蛛确实织成了几乎完美对称的正多边形的网，而蜜蜂那六边形的小屋又吸引了多少惊异。有些昆虫在产卵的时候，对数字表现出不可思议的敏感；而许多鸟儿会发觉雀巢出事儿了——假如谁把她的蛋取走，或者混入了外来的蛋。

1° 一只苏格兰乌鸦

这是一个动人而真实的故事：一只鸟能识数。一个苏格兰乡绅非常恼火，乌鸦竟在他庄园的瞭望塔上筑巢。于是，他决定用枪把它打下来。不知他多少次跑进塔楼，每当他走近时，那乌鸦都飞出巢去，远远地躲在一棵树上看着他。等疲惫的主人离开塔楼时，鸟儿又飞回来。乡绅不甘心被鸟儿耍弄，终于想出一个妙计。一天，他找来一个邻居帮忙。两人一起走进塔楼，然后一个人走出来，离开了，另一个人留在里面。可乌鸦没有上当，它还呆在那树上，一直等着留在塔里的那个人也走出来。似乎成心要和鸟儿竞赛，第二天，三个人走进了塔楼，然后两个人走出来，一个人留下等那只可恶的乌鸦。可惜鸟儿又没上当，它还呆在那树上，一直等着留在塔里的那个人也走出来。第三天，四个人来了，可还是没有成功。最后，五个人走进塔楼，四个人走出来，

一个人留在里面。这回乌鸦似乎数不过来了，分不清四和五，它飞回了塔里的窝。



乌能识数

故事的结局没有流传下来，不过，经过最后那个实验，乡坤大概能对那只乌鸦满怀爱怜和敬意，让它继续在塔楼里筑巢。

2° 孤独的黄蜂

一只孤独的黄蜂，让我们惊讶地发现昆虫是怎么识数的。母蜂在一个个蜂房产下卵，留下几只活毛毛虫，给孵化出来的幼蜂做食物。奇怪的是，对某一种黄蜂来说，留在每个蜂房的毛毛虫的数目竟令人惊讶地相等——有的留 5 只，有的留 12 只，甚至还有留 24 只的。最惊奇的还是黄蜂的一个变种（eumenus），雌的比雄的大好多。母蜂不知怎么还知道卵孵化出来的是儿还是女。如果卵是女儿，她会在蜂房里留下 10 个毛毛虫；如果卵是儿子，她会留下 5 只毛毛虫。

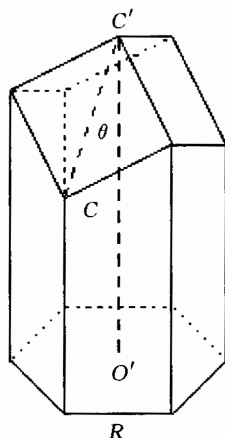
3° 哈佛的蝈蝈

哈佛大学克鲁夫特（Cruft）实验室的物理学家佩尔斯（George W. Pierce）教授研究过昆虫唱歌。[1] 在佩尔斯博士的实验室里有只小蝈蝈儿，它学会了数数，也改变了自己原来两拍子的节奏。在一次实验中，一个会学蝈蝈儿叫的助手唱起三拍子的歌儿，蝈蝈儿也跟着唱起来。然后助手改唱四拍子，蝈蝈儿也唱四拍子。然后助手又唱五拍子，蝈蝈儿也唱五拍子。可是接下来，小昆虫跟不上了，于是独自去唱刚才学会的歌儿。

1 哈佛克鲁夫特（Cruft）实验室是一个老资格的雷达实验室。（老实验室自然废物多，现在 cruft 已成为流行的名词，代表多余的东西。）

4° 机灵小蜜蜂

人们一直对蜜蜂表现的几何天才感兴趣。头一个记录这个奇迹的，是大约1600年前活跃在亚历山大城的古希腊著名几何学家帕普斯(Pappus)。在他有名的《数学汇编》(*Mathematical Collection*)第五卷里,我们找到下面一段关于蜂房的极值特性的文字：



蜂房的结构满足 $\cos\theta = \sqrt{3}/3$，即 $\theta = 57.3°$，这样表面积最小，材料最省。

> 也许因为它们明白自己肩负着一个大使命，要把那样甘美的食物，从神的身边拿来，奉献给那部分多能的人类，所以它们不愿把它随意倾泻在黄土、树林或其他杂乱丑陋的东西上。它们从大地上最美丽的花朵采撷芬芳，然后，为了聚集蜂蜜，它们用那菁华构筑了我们所谓的蜂房，一格紧接着一格，相同的六边形，一样的大小。我们猜想，它们是凭着先天的几何感觉来设计蓝图的。它们一定以为只有那样的图形才能使邻近的格子紧密相连，就是说，两个格子享有共同的边界，这样才不会混入外来的东西，玷污蜜的纯粹。不过，有三种直边的图形能满足那要求——我说的是等角等边

的规则图形，因为蜜蜂不会要不整齐的图形……尽管三种图形都能在同一点完全填充空间，但蜜蜂凭天生的智慧选择了它们那个具有最大角度的建筑图形，它们相信它将比其他两种图形容纳更多的蜂蜜。[2]

2 蜂房壁是正六边形柱，但房底不是平的，而是交汇在中心点的三个菱形（你可以拿只铅笔来削成这个样子）。大数学家华罗庚先生1964年写过一篇关于蜂房的文章，从观察引出问题，然后用中学数学来解决问题，最后引出更抽象的问题（见《华罗庚科普著作选集》，上海教育出版社，1986年）。

5° 数学家的类别

培根（Francis Bacon，1561～1626），英国的道德家、先知、哲学家和文学家，他的作品往往妙语连珠，而且很多还特别适合用来说数学和数学家。例如，他分哲学家为三群——蚂蚁、蜘蛛和蜜蜂。蚂蚁哲学家很勤快，也很愚笨，他们零乱地收集许多琐碎而无用的点滴知识；蜘蛛哲学家凭自己的大脑虚构复杂而脆弱的理论；蜜蜂哲学家向大自然寻求原料和灵感，靠辛苦的劳作构筑健全的理论。培根说这才是真正的哲学家。我们也完全可以把"哲学家"替换成"数学家"。

6° 对数与乘法

在代数或三角课教对数，我们可以停下来，让同学们听听下面的离奇故事：

有个游客每年都来我们的一个国家公园。有一次，他遇到蛇先生和夫人，但没看见小蛇。于是他们对话，游客问，"你们的宝宝怎么没来？" "哦，你看，"蛇先生回答，"我们是蝮蛇家（"加"）族，不会乘法。"[3] 第二年，那人重游公园，又看到蛇先生和夫人，还跟着好多小蛇。他问，"怎么有那么多儿女了？" "哦，你看，"蛇先生回答，"公园的管理员来了，给我们做了一个对数表，所以我们一家现在也能乘了。"

3 蛇先生在用双关语开玩笑呢。这一家是"蝰蛇"，在英文里与"加法器"是同一个词（adder），而乘法与繁殖也是同一个词（multiply）。

7° 优劣归纳法

一个科学家的实验室的桌面上摆着两个大坛子，左边的坛子装着100只跳蚤，右边的坛子是空的。科学家小心地从左边的坛子里取出一只跳蚤，放在两个坛子中间的桌面上，退后一步，然后大喊一声“跳!”跳蚤跳起来，跳进了右边的坛子。接着，科学家又小心地从左边的坛子取出一只跳蚤，放在两个坛子中间的桌面上，退后一步，然后大喊一声“跳!”跳蚤跳起来，跳进了右边的坛子。就这样，科学家把坛子里的100只跳蚤都一个个取出来，然后命令它们跳进右边的坛子。然后，科学家交换两个坛子的位置。接下来的实验有一点儿不同了。这回，他小心地从左边的坛子里取出一只跳蚤，折断它的后腿，放在两个坛子中间的桌面上，退后一步，然后大喊一声“跳!”跳蚤没有跳起来。接着，科学家又小心地从左边的坛子里取出一只跳蚤，折断它的后腿，放在两个坛子中间的桌面上，退后一步，然后大喊一声“跳!”跳蚤没有跳起来。就这样，科学家把坛子里的100只跳蚤都一个个取出来，但没有一只听他的命令跳起来。于是，科学家在记录本上归纳出如下结论:“如果跳蚤的后腿折了,它就什么也听不见。”

8° 数学马

有一匹马，显露了惊人的数学才能。它掌握了算术，接着学会了基本的代数。很快它又学会了平面几何和立体几何，然后是三角。后来，人们教它解析几何，不过这回马儿举止失常了，踢腿尥蹶子，疯了似的。这一切不过是证明了不能把笛卡儿推到马的前面。[4]

4 又一个文字游戏。从解析几何联想到它的发明者笛卡儿(Descartes)，而那名字中有辆“大车”(“cart”)，我们当然不能把大车套在马的前面。



原 始 人

探险家和人类学家收集的好多故事，清楚地说明了远古的人类缺乏数学感。现在看来，人类天生能识别不同的物体，比较形态和大小，而最早的数学思想也许就来自这些原始的本能。这样的远古数学也许该叫潜意识的数学。

9° 二加二

加尔顿爵士(Sir Francis Galton,1822 ~ 1911)是英国科学家、探险家和人类学家。他告诉我们,原始的非洲达马拉(Damaras)人通常以两捆烟草换一只羊。有一天,一个白人一下拿出四捆烟草来,要换两只羊,把当地人弄糊涂了。达马拉人怀疑被骗,于是交易只得一步步来。先拿两捆烟草,牵走一只羊,然后再拿出两捆烟草,再牵走另一只羊。当部落的人们发现结果跟那人开始做的一样,便认为他身上有魔力。

不过，达马拉人并不缺乏智力。他们很清楚羊群和牛群有多少，而且立刻能发觉是不是丢了哪一只，因为他们熟悉那些动物的每一张脸。对我们来说，开发这种形式的智能（正确而敏锐的观察力），比学会计数的本领，不知要困难多少。

10° 矢量和

不能简单地把两个矢量的大小加起来，因为矢量的方向也很重要。关于矢量的和，有个难以置信的故事，是著名的环球旅行家约翰逊（Martin Johnson）讲的。一天，在中部非洲，约翰逊遇到八个健壮的土著人，已经精疲力竭了。原来，一辆越野汽车

陷在泥里，四个人从前面推，四个人从旁边推，可车纹丝不动。约翰逊让他们八个人都站在车尾，很轻松就把车推动了。那些土著人对约翰逊重新组织矢量的本领感到惊讶。

11° 好大的“三”

原始人为了成功表达最初几个数字，形成了元音，而最后往往都发出同一个音，只不过代表“很多”。例如，昆士兰的土著人就是这样的，他们数“一，二，二和一，二二，很多”，最后那个词不仅代表五，也代表所有大于四的数。更有趣的例子是，用很小的数“三”来代表“多”或一个非常大的数字。例如，塔斯马尼亚岛（Tasmanian）的土著人数“一，二，很多”。我们在拉丁语中也能看到三的这种用法：“ter felix”本来意思是“三倍的快乐”，而实际意思是“非常快乐”。英语也有这样的例子：“在理的人力大无穷”[5]；而法语的例子是“très bien”（“很好”）。

5 原话“Thrice is he armed that hath his quarrel just”，出自莎士比亚《亨利六世》（中篇第三幕第二场），大意是“他理直气壮，仿佛披着三重盔甲。”我们不妨来看一个中文的例子：《后汉书·袁绍传》：“惟陛下垂尸鸠之平，绝邪谄之论，无令愚臣结恨三泉。”章怀太子（李贤）注说，“三者，数之小终，言深也”。既然是代表一定的“终”，当然可以代表很多。

12° 戈和尕

关于史前和原始人类，有许多良莠不齐的虚构的数学故事。其中，有两个叫戈（Gog）和尕（Gug）的人，流传着下面的故事（它有好几个版本）：

在一个实行一夫多妻的部落里，已婚男子在部落的地位取决于他几个妻子的重量——妻子们越重，男人的分量也越大。每年称重的那一天，男人照规矩让妻子们站在整齐铺开的兽皮上，部落首领拿来一架粗糙的跷跷板，让一个男人的妻子与另一个男人的妻子分坐在两端，然后决定她们男人的相对地位。戈只有一个妻子，长得十分壮实，而尕有两个非常苗条的妻子，两人整天都在争吵谁更重要。称重的日子到了，戈把妻子放在一张巨大的斑



马皮上，而尕把妻子放在两张小羚羊皮上。称重开始了，戈的妻子与尕的两个妻子恰好一样重。结果是两个男人一样重要，因为，根据首领的裁定，“斑马皮上的那个女人等于那两张羊皮上的两个女人的总和。”

前希腊时代的数学

起初，人们只考虑具体的数学问题，问题一个个出现，看不出有什么相互的关联。当人类智力能从具体的数学关系发现一般的抽象关系，并把具体作为一个特例包含在其中，这时数学才成为科学。这个数学阶段可以叫经验的或科学的数学，因为那些数学是通过试错的方法、实验的方法和其他经验的或实验室的过程发现的。

从潜意识的数学走到科学的数学，人类经历了多少个世纪，我们没有任何能够借以估计的证据。在人类历史的源头，我们发现已经存在着大量科学的数学的东西。这些证据说明，科学的数学诞生在孕育了先进社会形态的古代东方的某些江河流域，如埃及的尼罗河、美索不达米亚的底格里斯河和幼发拉底河，中南亚的印度河和恒河、东亚的黄河和长江。早期的数学几乎没有一点儿演绎推理的元素。到了公元前600年的古希腊时代，演绎推理才开始在数学中扮演基本的角色，数学也才成为系统、演绎的数学。[6]

6 参见《告别数学圈》（A158°，“数学树”）。

古希腊之前的数学家，一个名字也没流传下来，当然也不会有数学家个人的奇闻轶事。不过，关于那个时代的数学，还是有好些有趣的故事。其实，也许很难找到比普林普顿（Plimpton）322 更激动人心的数学故事了。

13° 林德纸草问题 79

古埃及数学的主要来源是林德(Rhind) – 阿默斯 (Ahmes) 纸草卷，一本兼有实用手册性质的数学教科书，包括 85 个数学问题，是阿默斯在大约公元前 1650 年用写经文的草书体从一部古书抄录下来的。纸草卷原由英国的埃及学专家林德 (A. Henry Rhind) 在埃及买下，后来归了一家英国博物馆。

尽管林德纸草卷里的多数问题都不难破译和解释，但有一个问题，问题 79，却不那么肯定。问题出现在一组奇怪的数字里，我们转录在下面：

财物	
房子	7
猫	49
鼠	343
麦穗	2401
量斗	16807
	19607

很容易看出前五个数是 7 的幂，然后是它们的和。因为这一点，乍看起来作者似乎在给这些幂次引入代表性的名词，如房子代表 1 次，猫代表 2 次，等等。

然而，历史学家康托 (Moritz Cantor) 在 1907 年提出一个更合理也更有趣的解释。他从这个问题发现了一个流行在中世纪的问题的源头，那是 1202 年斐波那契 (Leonardo Fibonacci) 在他的《算经》(*Liber abaci*) 中提出的。那本书有很多问题，其中的



一个说：“去罗马的路上走着七个老妇人。每个妇人有七匹骡子，每匹骡子驮着七个麻袋，每个麻袋装着七块大饼，每块大饼旁放着七把小刀，每把小刀套着七重鞘。妇人、骡子、麻袋、大饼、小刀和刀鞘，去罗马的路上共有多少东西?”同一个问题还有我们更熟悉的形式，就是后来唱的那支古老的英国儿歌：

As I was going to St. Ives
I met a man with seven wives;
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits;
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?

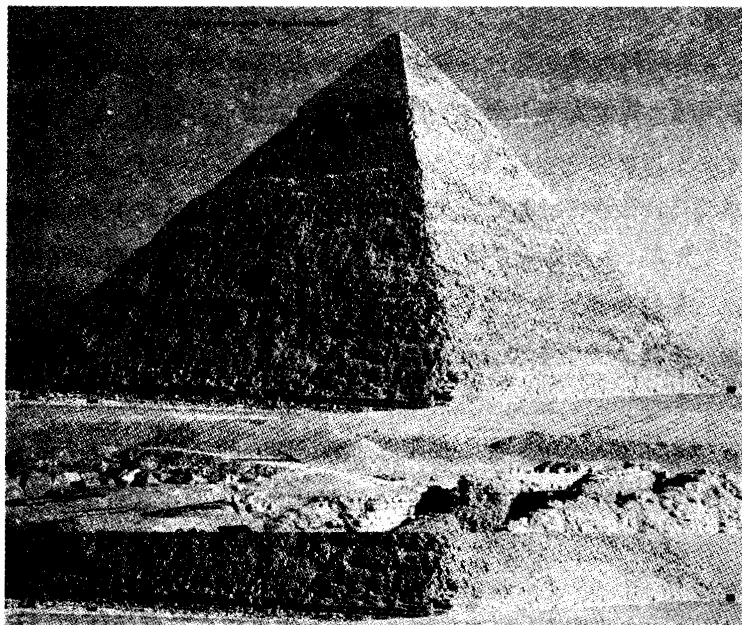
据康托的解释，林德纸草卷的那个原始问题后来也许演变成下面的形式：“一笔财富七匹马，一马背上七只猫，一猫抓住七只鼠，一鼠偷吃七棵穗，一穗产出七斗粮。马猫鼠穗和稻粮，东西一共是多少?”

看来，这个问题流传到今天，仍然是一个疑难。当阿默斯抄录的时候，它已经很古老了，而在斐波那契把它写入《算经》时，它差不多已经3000年了。750多年后的今天，我们还在把它传唱给我们的孩子。我们不禁想知道，那古老的英国儿歌会不会也出现在古埃及的问题里？尽管它完全可能是盎格鲁-撒克逊人的杰作。

不时出现在我们今天杂志上的许多疑难，都能找到它在中世纪的影子。现在几乎不可能确定它们还能追溯到多远的过去。

14° 吉萨金字塔

吉萨（Gizeh）大金字塔大约建于公元前2900年，无疑牵涉着一些数学和工程学的问题。整个建筑占地13亩，是由200多万块石头堆砌起来的，石块平均重两吨半，镶嵌恰到好处。这些石块都来自尼罗河对岸的采石场。有些墓室穹顶是54吨重的花岗岩，27英尺长，4英尺厚，它们从600英里外的采石场运来，然后固定在离地面200英尺的地方。据说，金字塔的四边形底边的相对误差不超过一万四千分之一，而每个角与直角的偏离不超过二万七千分之一。



吉萨大金字塔

当然，如果想到这项工程是100 000士兵苦干30年的结果，

那些统计数字背后的巧夺天工就会大失光彩。例如，抬升巨石的难题，做起来也许非常简单：当金字塔不断升高时，把它埋进沙里，然后沿着沙堆的斜坡，一点点把巨石滚到塔的高度，最后再把那些沙运走。只要有了足够的时间和劳力，很多技艺都可以通过简单原始的办法来实现。尽管如此，工程问题还是需要这样那样的方式来解决。举例说，为了采集巨石，为了把粉红色花岗岩的巨大方尖塔树立起来，埃及人该遭遇多少工程难题！现存最大的方尖塔耸立在底比斯的太阳寺前，是公元前1500年的杰作，长几乎105英尺，四方形基础宽10英尺，重约430吨！

15° 最伟大的埃及金字塔

莫斯科纸草卷是公元前1850年的古埃及文书，包括25个数学问题，我们发现下面一个计算的例子：

> 告诉你：兹有一平顶金字塔，高为6，底边为4，顶边为2。你须将4平方，得16；将4加倍，得8；将2平方，得4；将这些数字加起来，结果28。你须将6三分，得2。然后将28加倍，得56。看，结果是56。你可以发现它是正确的。

现在我们知道，古埃及人造的都是四方的金字塔，这个例子当然说明了如下公式的应用：

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

它计算一个高为h、底边分别为a和b的平顶金字塔的体积。在上面的例子中，$h=6$，$a=4$，$b=2$。问题里的步骤，等于把这些数值逐个带入那公式，然后得到正确的答案，体积为56。假如

解释是对的（很难想象它是错的），那我们不得不承认古埃及人发现那公式是多么非凡的成就。公式的任何严格推导都需要一定形式的积分计算，所以他们一定是从归纳或经验的方法发现的。在前希腊时代的数学里，我们还找不出第二个像这个公式一样的真实例子。人们也提出了好些猜想来解释它是如何被经验发现的。它是归纳推理的杰作，数学史家贝尔（E. T. Bell）恰如其分地把这个古埃及的例子称作“最伟大的埃及金字塔”，因为那公式背后的归纳发现，也许比任何石头的古老金字塔的物理结构更激动人心。

16° 化圆为方

在公元1650年左右的林德纸草卷中，我们发现了化圆为方问题的第一个解答：构造一个正方形，使它的面积等于某个已知圆的面积。它告诉我们，与圆面积相等的那个正方形的边长等于圆直径的8/9。这相当于让 $\pi=(4/3)^4$，或近似等于3.16。这是根本的一点。

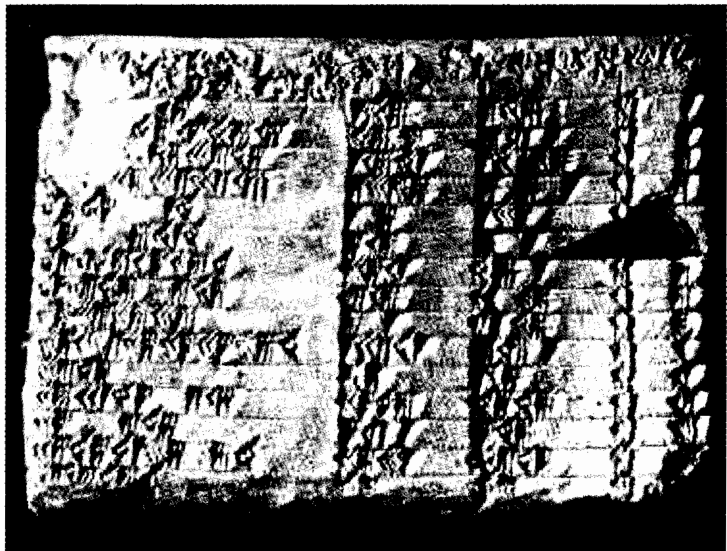
我们自然想知道，古埃及人是如何得到那个方圆问题的近似解的。很可能是通过类似下面的某种经验过程发现的：在平地画一个大圆，然后拿小卵石将圆的内部密密地填满，尽可能选择相同形状和大小的卵石。然后，把圆圈里的卵石重新排成一个正方形。测量正方形的边，会发现它很接近原来那个圆的直径的8/9。

17° 普林普顿322

自19世纪中叶以来，在美索不达米亚工作的考古学家系统发掘了近50万块陶土刻片。迄今已确认了其中的大约300片是严格意义的数学刻片，包括数学表和数学问题。我们有关古巴比

伦数学的知识，多数都来自学者们对这些刻片的破译和解释。

在已经分析过的巴比伦数学刻片中，最惊人的也许是所谓的普林普顿 322，也就是哥伦比亚大学普林普顿（G. A. Plimpton）收藏总目第 322 号。刻片是用古巴比伦文字写的，大约可以追溯到公元前 1900 年到公元前 1600 年之间。1945 年，纽格鲍尔（Otto Neugebauer）和萨克斯（A. J. Sachs）第一次揭开它们的面目。



Plimpton 陶土刻片

从图中大概能看出那刻片的模样。遗憾的是，它的整个左边缘都破碎丢失了，右边缘中间附近也破了一大块，左上角还脱落了一层。检验的时候，沿着破裂的左边缘发现了现代胶水的晶体。这说明刻片在挖掘出土的时候可能还是完整的，后来破裂了，人们试着把碎片补上去，可最后又分裂了。这样看来，丢失的那块可能还在，像草垛里的一根绣花针，藏在那些古老的刻片堆

里。我们马上会看到,假如丢失的碎片找到了,那将是非常有意义的。

刻片上有三列基本完整的数字，为方便起见，我们在图中用十进制数字把它们写出来。沿破裂的边缘还有一列残缺的数字，下面我们要把它复原。

显然，最右端的一列数字只不过用来记行数。旁边的两列，乍看起来是非常随意的。然而，细看之下，我们可以发现两列对应的数字（可惜有四个例外）构成整数边长的直角三角形的斜边和一个直角边。图 1 标记了四个例外，原来的数字写在修正后的数字右边的括号里。第二行的例外很棘手，而其他三个例外却很容易解释。例如，在第九行，481 和 541 在 60 进位制下分别为（8，1）和（9，1）。那么显然，8 被错写成 9，不过是在刻画楔形文字的时候铁笔打滑了。第 13 行的数字是正确数字的平方，而最后一行的数字是正确数字的一半，说明一定数字的平方与一半在构造这个表时肯定起着什么作用。

119		169		1
3367		4825	(11521)	2
4601		6649		3
12709		18541		4
65		97		5
319		481		6
2291		3541		7
799		1249		8
481	(541)	769		9
4961		8161		10
45		75		11
1679		2929		12
161	(25921)	289		13
1771		3229		14
56		106	(53)	15

图 1　普林普顿刻片上的数字

三个可以构成直角三角形三边的正整数，如（3，4，5），就是我们现在所谓的毕达哥拉斯数组。假如数组没有1以外的公因子，就是基本毕达哥拉斯数组。于是，（3，4，5）是基本数组，而（6，8，10）不是。距普林普顿刻片2000年后，阿拉伯人的一大贡献，就是证明所有基本毕达哥拉斯数组（a，b，c）都可以用参数表达为

$$a=2uv,\quad b=u^2-v^2,\quad c=u^2+v^2$$

这里 u 和 v 是互素的两个数，奇偶性也不同，而且 $u>v$。如果令 $u=2$，$v=1$，我们就得到 $a=4$，$b=3$，$c=5$。

现在，我们根据普林普顿刻片的斜边 c 和直角边 b，来计算整数边直角三角形的另一边 a。我们得到如下的毕达哥拉斯数组：

行	a	b	c	u	v
1	120	119	169	12	5
2	3456	3367	4825	64	27
3	4800	4601	6649	75	32
4	13500	12709	18541	125	54
5	72	65	97	9	4
6	360	319	481	20	9
7	2700	2291	3541	54	25
8	960	799	1249	32	15
9	600	481	769	25	12
10	6480	4961	8161	81	40
11	60	45	75	2	1
12	2400	1679	2929	48	25
13	240	161	289	15	8
14	2700	1771	3229	50	27
15	90	56	106	9	5

令人惊奇的是，除了11和15两行，所有数组都是基本数组。为讨论方便，我们还罗列了产生那些数组的参数 u 和 v。这似乎充分证明了，在那么遥远的年代里，巴比伦人已经熟悉了我们上面说的基本毕达哥拉斯数组的一般参数表达形式。证明的力量还在于，我们可以看到，u 和 v（从而还有 a，因为 $a=2uv$）都是规则的60进制的数——也就是形如 $2^p3^q5^r$ 的数，它们的倒数也可以表达为60进制的有限小数。[7] 看来，刻片上的数表，是通过精心选择那些小参数来构造的。

参数 u 和 v 的选择，一定是在后来与除法有关的某个过程的推动下实现的，因为规则数出现在倒数表中，可以用来把除法化为乘法。检验第四列（部分破损了），就能证实这一点。我们发现，那一列包含着不同三角形的 $(c/a)^2$ 值。[8] 为了计算这些除法，边长 a，从而参数 u 和 v，都必须是规则的。

我们还是来具体看看 $(c/a)^2$ 的那列数字。这一列数字当然也就是直角三角形 b 边所对应的 B 角的正割（$\sec B$）的平方。因为 a 边是规则的，$\sec B$ 在60进制下的表达是有限的。更有趣的是，像那些特别选出的三角形，$\sec B$ 构成一个惊人的规则序列：从表中的一行到下一行，数值几乎正好减小1/60，而相应的角度从首行的45°减小到末行的31°。这样，我们便通过整数边的直角三角形得到一个从45°到31°的正割表，在这个表中，函数值是均匀变化的，尽管对应的角度是跳跃的。所有这一切确实令人惊讶。很可能还有一些同样的数表，例如角度从30°到16°，从15°到1°。

普林普顿322的分析让我们看到了古老的巴比伦数学刻片需要经历怎样的认真考察。过去，人们常把这些刻片当普通的账本而草率地丢弃了。

7 我们习惯了10进制数，如81，它实际上等于 $8(10^1)+1(10^0)$，也可以写成（8，1），这就是它的“展开”形式。但其倒数1/81却是无限（循环）的（0.12345679 …），而在60进制下，它能有限地表示为（0,0,44,26,40），即 $44\times60^{-2}+26\times60^{-3}+40\times60^{-4}$。现在我们发现了古巴比伦人有一个“标准”倒数表，包括了从2到81的所有数的倒数，这也就是下文说“规则数出现在倒数表”中的意思。

8 这里没把那一列写出来。举一个例子：它的第五行为 $(1,48,54,01,40)=1+48\times60^{-1}+\cdots=9409/5184$，也就是 $(97/72)^2$。

18° 角度

今天我们把圆周分为360°，无疑也该感谢古巴比伦人。为什么选择360这个数字呢，人们提出了几种不同的解释。

如果假定古巴比伦人相信一年是360天，那他们会自然地把圆划分为360个部分，让每个部分代表他们想象的太阳绕着地球走一天的距离。这个解释在今天很值得怀疑，因为我们有证据说明巴比伦人很清楚一年不止360天。

当然，巴比伦人也很可能熟悉下面的几何事实：拿圆半径做弦，正好可以在圆周内排满6根。于是，在60进制的基础上，他们自然想着把每根弦的中心角分为60个相等的部分，结果，整个圆也就等分为360个部分了。

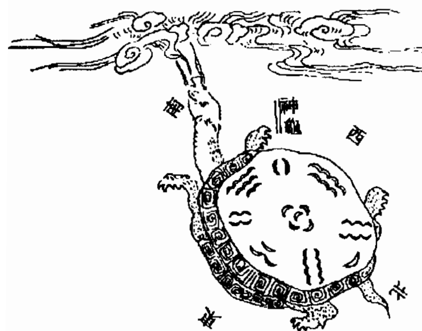
大学者O·纽格鲍尔，也是研究古巴比伦数学和天文学的权威，也提出一种有趣的解释。在苏美尔人的时代，有一个很大的距离单位，就像巴比伦里那样，大约等于今天的7英里。巴比伦里用来度量较长的距离，因此自然也可能成为一个时间单位，即走过1巴比伦里所需要的时间。后来，大约公元前1000年的时候，巴比伦天文学达到了空前的阶段，有了系统的天象记录，那个“巴比伦时间里”就用来度量时间的长度。他们发现，一整天等于12“里”，而一整天也等于天空旋转一周，所以一个圆周被分成12个相等的部分。不过，为方便起见，巴比伦里又被划分为30个相等的部分。这样，圆周就等分为(12)(30)=360个部分了。

19° 幻方

中国的数学作品，至少其中的某些部分，也可以追溯到久远的年代。这一点不容易证实，因为我们缺乏原始材料。公元前

213 年，秦始皇下令焚书坑儒，尽管命令不可能完全执行，烧毁的图书也可能凭记忆保存下来，但我们今天还是怀疑那些东西真是在那个不幸的年代之前出现的。

最古老的中国数学经典之一是《易经》。书中出现一张数字图，即著名的《洛书》(图 2)。



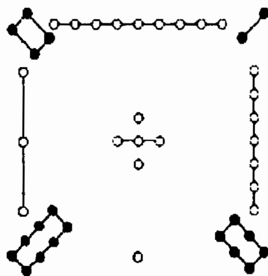


图 2　洛书。相传大禹治水时，一神龟从洛河爬出，背上数字排列为“戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，五居中央”，这就是洛书。

洛书是最古老的幻方，传说，公元前 2200 年，大禹在黄河之滨发现了它，原来刻画在一只神龟的背上。如图 2 画的，它是四方排列的数字图，数字用点表示，黑点代表偶数，白点代表奇数。任意一行的三个数、任意一列的三个数，以及每条对角线的三个数，它们的和都是相等的。

20° 3 - 4 - 5 三角形问题

有报告说，古埃及的测量员会拿一根绳子来打 11 个结，把它等分为 12 节，通过这样来构造 3 - 4 - 5 直角三角形。因为没有文字证据说明古埃及人懂得毕达哥拉斯定理（哪怕它的一个特例），于是我们自然提出下面的问题：不用毕达哥拉斯定理和它的任何相关结论，如何证明 3 - 4 - 5 三角形是直角三角形？读

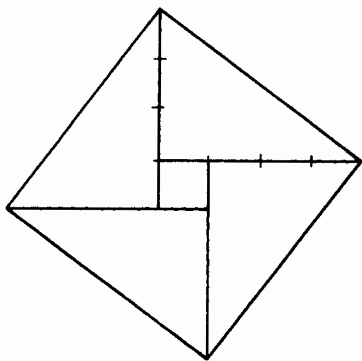


图 3

者也许有兴趣来试试。千百年来，我们有了很多证明方法。图 3 大致说明了一个特别简单的方法。四个边长分别为 3 和 4 的直角三角形紧贴在一个单位正方形的四边，形成一个面积等于 25（平方单位）的正方形。这意味着直角三角形斜边的长为 5，从而 3－4－5 三角形是直角三角形。这个解法见《周髀算经》(*The Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven*，一般认为是最古老的中国古代数学经典)，[9] 很容易推广去得到任意直角三角形的毕达哥拉斯关系。

9 唐朝的李淳风把《周髀算经》列为"算经十书"的第一种。它本是一本天文历算书，开篇就是周公向商高问"古者伏羲立周天历度"，所以英文本的名字那么奇怪。

来自中国的故事

下面三个中国古代数学家的故事，虽然发生在希腊时代之后，也不妨写出来。第一个故事是一篇悲凉的小传，后两个故事是虚构的。

21° 醉龙断发

数学家蔡邕是中国众多历法专家之一，大约生活在公元 190 年前后。他的著作都散佚了。据说他善饮酒，赢得了"醉龙"的名声。后来因为政治原因被判处死刑。不过在行刑的那一时刻，只把他的头发削了。

22° 怀文数枣

有些古代中国数学家精于珠算和算筹。有故事说，公元560年左右，在晋阳学馆，一个西域来的和尚对数学家兼冶金家怀文的计算本领佩服无比。和尚指着院子里的一棵枣树，请他算算树上的枣子有多少。他拿出算子，顷刻间就报出了结果，不但说了树上共有多少颗枣儿，还分清了多少熟的，多少生的，多少半生半熟的。为了检验他的结果，和尚把枣儿都打下来，一颗颗数。他发现数学家多算了一颗。“不可能，”怀文说，“把树再摇摇看。”果然，树上又落下一颗。[10]

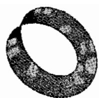


怀文数枣

10 綦毋怀文是北齐冶金家，生平材料很少。这里的故事见《北史》卷八十九：綦毋怀文每云：“昔在晋阳为监馆，馆中有一蠕蠕客，同馆胡沙门指语怀文云：‘此人别有异算术。’仍指庭中枣树云：‘令其布算子，即知其实数。’乃试之，并辨若干纯赤，若干赤白相半。于是剥数之，唯少一子。算者曰：‘必不少，但更撼之。’果落一实。”印度佛经里有类似数树叶的故事（见《根本说一切有部毗奈耶破僧事》）。

23° 一行寻师

唐代最有名的数学家是僧一行，生活在公元725年前后，曾奉诏编制新历。他的著作都散佚了。在郑处诲《明皇杂录》（写于855年）中，有一行的简短生平。



僧一行，姓张氏，鉅鹿人，本名遂。唐玄宗既召见，谓曰："卿何能？"对曰："唯善记览。"玄宗因诏掖庭，取宫人籍以示之，周览既毕，覆其本，记念精熟，如素所习读，数幅之后，玄宗不觉降御榻，为之作礼，呼为"圣人"。先是，一行既从释氏，师事普寂于嵩山。师尝设食于寺，大会群僧及沙门，居数百里者皆如期而至，且聚千余人。时有卢鸿者，道高学富，隐于嵩山，因请鸿为文，赞叹其会。至日，鸿持其文至寺，其师授之，置于几案上。钟梵既作，鸿请普寂曰："某为文数千言，况其字僻而言怪，盍于群僧中选其聪悟者，鸿当亲为传授。"乃令召一行。既至，伸纸微笑，止于一览，复置于几上。鸿轻其疏脱而窃怪之。俄而群僧会于堂，一行攘袂而进，抗音兴裁，一无遗忘。鸿惊愕久之，谓寂曰："非君所能教导也，当纵其游学。"一行因穷《大衍》。自此访求师资，不远千里。尝至天台国清寺，见一院，古松数十步，门有流水。一行立于门屏间，闻院中僧于庭布算，其声簌簌。既而谓其徒曰："今日当有弟子求吾算法，已合到门，岂无人导达耶？即除一算。"又谓曰："门前水合却西流，弟子当至。"一行承言而入，稽首请法，尽授其术焉。而门水旧东流，忽改为西流矣。邢和卜尝谓尹愔曰："一行其圣人乎！汉之洛下闳造《大衍历》，云后八百岁当差一日，则有圣人定之。今年期毕矣，而一行造《大衍历》，正在差谬，则洛下闳之言信矣。"一行又尝诣道士尹崇，借杨雄《太玄经》，数日复诣崇还其书。崇曰："此书意旨深远，吾寻之积年，尚不能晓。吾子试更研求，何遽见还也？"一行曰："究其义矣。"因出所撰《大衍玄图》及《义诀》一卷以示崇，崇大嗟伏，谓人曰："此后生


一行大师像

颜子也。"初，一行幼时家贫，邻有王姥者，家甚殷富，奇一行，不惜金帛，常前后济之，约数十万，一行常思报之。至开元中，一行承玄宗敬遇，言无不可。未几，会王姥儿犯杀人，狱未具，姥诣一行求救。一行曰："姥要金帛，当十倍酬也。君上执法，难以情求，如何?"王姥戟手大骂曰："何用识此僧!"一行从而谢之，终不顾。一行心计浑天，寺中工役数百，乃命空其室，内徒一大瓮于中央，密选常住奴二人，授以布囊，谓曰："某坊某角有废园，汝向中潜伺。从午至昏，当有物入来，其数七者，可尽掩之。失一则杖汝。"如言而往，至酉后，果有群豕至，悉获而归。一行大喜，令置瓮中，覆以木盖，封以六一泥，朱题梵字数十，其徒莫测。诘朝，中使叩门急，召至便殿，玄宗迎问曰："太史奏昨夜北斗不见，是何祥也？师有以禳之乎?"一行曰："后魏时失荧惑，至今帝车不见，古所无者，天将大警于陛下也。夫匹夫匹妇不得其所，则殒霜赤旱。盛德所感，乃能退舍。感之切者，其在葬枯出系乎！释门以嗔心坏一切喜，慈心降一切魔。如臣曲见，莫若大赦天下。"玄宗从之。又其夕，太史奏北斗一星见，凡七日而复。至开元末，裴宽为河南尹，深信释氏，师事普寂禅师，日夕造焉。居一日，宽诣寂，寂云："方有少事，未暇款语，且请迟回休憩也。"宽乃屏息，止于空室，见寂洁涤正堂，焚香端坐。坐未久，忽闻叩门，连云："太师一行和尚至矣。"一行入，诣寂作礼。礼讫，附耳密语，其貌绝恭。寂但颔云："无不可者。"一行语讫，降阶入南室，自阖其户。寂乃徐命弟子云："遣钟，一行和尚灭度矣。"左右疾走视之，一如其言。灭度后，宽乃服衰绖葬之，自徒步出城送之。(译者据《明



皇杂录补遗》补)

11 “大衍”问题源于《孙子算经》的“物不知数”问题：“今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何?”秦九韶在《数书九章》（1247年成书）中对此类问题的解法作了系统的论述，称之为“大衍求一术”(“indete-rmi-nate analysis”)。现在我们知道这是一次同余式方程组的问题，而同余理论是高斯（C. F. Gauss）在1801年建立起来的。

见玄宗皇帝之前，一行在嵩山跟普寂学佛法。在一次盛大聚会上，著名学者卢鸿写了一篇纪念文章。文章写得佶屈聱牙。他宣称，在场有谁能读懂它，他就收他做徒弟。一行走上前来，把文章扫过一遍，然后微笑着将它拿起来，卢鸿很生气。当一行把全文一字不差背诵出来时，卢鸿惊讶不已，告诉普寂说，这个学生你教不了，最好让他出游。

于是，一心要学“大衍术”的一行出山远游，四海寻师。[11]一天，他来到天台山国清寺，寺前有一庭院，泉水叮咚。一行站在院中，听见寺内老和尚说，“今天有人来向我学计算之学。现在人应该在门外了，谁去领他进来?”接着，老和尚大声说，“院中泉水西流——我的学生该来了。”于是，一行走进来，跪在老和尚面前。老和尚便开始教他计算方法，而院中泉水立刻倒转东流。

这个故事说明那时要学数学是多么艰难，而数学发现又多么容易随发现者一起消失。

泰　勒　斯

12 即著名的古希腊“七贤”。“七贤”名单颇多争议，流传最广的是：米利都的泰勒斯（Thales of Mil-etus），雅典的梭伦

据传统说法，希腊数学的兴起，离不开米利都的泰勒斯在公元前6世纪前期的工作。那是一个全能的天才，古代“七贤”之一，[12]系统数学的创立者，数学演绎法的第一人。跟其他大人物一样，泰勒斯也有说不完的迷人故事，即使不是真的，也至少是可能的。

24° 如何发财

一天，还是穷人的泰勒斯和一个来看他的穷朋友谈话。朋友说，“世上穷人的命可真苦啊！生下来穷，一辈子都穷。”“不一定吧。”泰勒斯回答，“我看人只要用心，发财是很容易的。”“说起来当然容易，”朋友说，“我发现做起来可难啦。”“我告诉你，”泰勒斯说，“六个月后你来找我，我会让你看看发财有多简单。”六个月后，朋友回来了，惊讶地发现他过去的穷朋友如今成了远近最富有的人。泰勒斯看出他的疑惑，告诉他，“我只是想让你看到，只要你专心一个问题，发财该是多么容易的事情。”“那你告诉我，你是怎么做的？”朋友问。“很简单。”泰勒斯解释说，“我发现橄榄要大丰收了，就四处走访，偷偷地把本地所有的榨油机都买下来。等橄榄榨油的时候，这儿没有机器了，都得来我这儿。我把机器租出去，就发财了。你看，只要你多用一点儿心思，发财就很容易。”

25° 犟骡子

泰勒斯做过小生意，在山上开了口盐坑。每天，他的骡子来驮盐下山。下山的小路横过一条小河。一天，一头满载盐的骡子在过河时滑倒了。骡子奋力挣扎，四脚朝天，背上的盐袋浸在水里，盐溶解了。于是，骡子轻轻松松走了下山。骡子记住了这次经历，接下来的三天里，它都在过河时打一个滚，让盐溶解，减轻自己的包袱。像你我这等凡人，一定会拿根小棍跟在骡子后面吆喝，打它屁股，帮它改掉坏毛病。可泰勒斯是“大贤人”，第二天那骡子下山时，背上驮的是一袋海绵。

(Solon of Athens)，普林尼的比亚斯(Bias of Priene)，米提林的皮塔库斯(Pittacus of Mitylene)，斯巴达的基隆(Chilon of Sparta)，林都斯的克里奥布卢斯(Cleobulius of Lindos)，科林斯的佩里安德(Periander of Corinth)。

26° 为什么泰勒斯不结婚?

在泰勒斯更富有的晚年，朋友梭伦（希腊的伟大立法者）来看他。一天晚上，梭伦问他：“现在你几乎拥有了男人渴望的一切——财富、影响、健康、安逸、名声、尊敬、知识和智慧——却没有妻子。告诉我，朋友，你为什么不结婚?”“那真是个问题,”泰勒斯回答，“不过现在天太晚了，我想最好是明天早晨告诉你。”于是，主人和客人去休息了。第二天早晨，他们共进早餐。还没来得及吃碗里的葡萄，一个气喘吁吁的人跑进来，给梭伦送来一封信。梭伦读过信，悲伤地站起来，呜咽着说：“泰勒斯，我必须立刻回去。信上说我最心爱的儿子从马上摔下来死了。”“别难过，亲爱的梭伦。”泰勒斯安慰说，“坐下来静静。信是假的，整个事情都是我策划的。我只是想告诉你我为什么不结婚。”

27° 泰勒斯望星空

一天夜里，泰勒斯一边漫步，一边望着星空，不小心掉进了一条深沟，爬不起来了。他大声呼救，来了一个老妇人，把他拉上来。老妇人问他怎么会落到这个地步，他解释说刚才在看星星。老妇人很奇怪，“你连自己脚下的东西都看不见，怎么能看清天上的事情?”

28° 实至名归

有人问他如何评价自己的发现，泰勒斯回答：“当你把那发现告诉别人，不会说它是你的，而说是我的，我就很满足了。”

29° 道德忠告

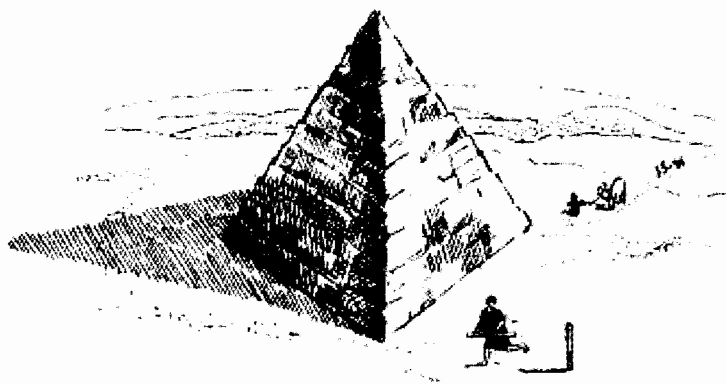
有人问泰勒斯，我们怎么才能过一种更正直的生活，他建议，“尽量不要做令别人讨厌的事情。”

30° 不可思议

人家问，在他一生的游历中，什么事情最不可思议，泰勒斯回答：“长寿的暴君。”

31° 泰勒斯疑难

据说泰勒斯在埃及住过一段时间，他根据影子来计算金字塔的高度，赢得了赞誉。故事有两个版本。较早的一个是亚里士多德的学生耶洛尼姆斯（Hieronymus）讲的。故事说，泰勒斯在自己的影子和自己的身高一样时，发现了金字塔影子的长度。后来的故事是普卢塔克（Plutarch）讲的，说泰勒斯立了一根木棍，



泰勒斯测量金字塔

而且发挥了下列事实：“金字塔的高度与木棍高度之比，等于金字塔的影子与木棍的影子之比。”两个故事都没提到一个很现实

的困难：如何在那两种情形下获得金字塔影子的长度（从影子的顶点到塔底中心的距离）。

这个难题引出所谓的泰勒斯疑难：在影子观测和相似三角形的基础上，找一个方法来确定金字塔的高度。图4提出了一个解决办法（读者也许有兴趣来完成它），它需要观测两个相隔若干小时的影子。

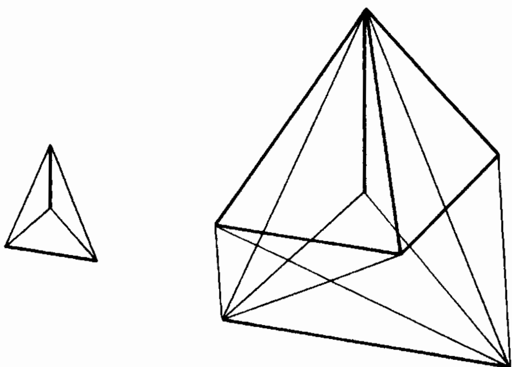


图4

32° 工程师泰勒斯

泰勒斯博学多能，还有一身今天看来颇为可疑的惊人的工程技艺。克罗苏斯（Croesus）王，泰勒斯的崇拜者、也许还是赞助人，曾急迫需要把他的军队渡过哈利斯（Halys）河。没有船，更没有浮桥，造桥也来不及，问题怎么解决？王来问泰勒斯。这位智者很快就找到了解决办法。他主持挖掘了一条临时的引水渠，将河水引出来。等军队通过干涸的河床，泰勒斯又让一切恢复原貌，为的是不亵渎王爷崇拜的河神。

33° 天文学家泰勒斯

还有一个故事，在今天看来也很可疑。故事说泰勒斯预言了

发生在公元前 585 年 5 月 28 日的日全食（或偏食）。一个说法是，那天，米堤亚人（Medes）和吕底亚人（Lydians）还在打仗——他们已经打了六年。士兵们突然发现他们是在越来越黑的天空下战斗。太阳在消失，恐怖笼罩下的军队停战了，和平来到了。后来，两个统治家族的联姻又给和平加了保证。

精确预言日食的时间和地点所需要的数学策略远远超越了泰勒斯的时代。在那个年代，即使只预言日食发生的年月和大概地区，就是值得夸耀的成就了。

与天文学有关的另一个故事说，泰勒斯建议水手根据小熊星座的指引来把握航向，而不要跟随大熊星座。

34° 政治家泰勒斯

后来，泰勒斯的崇拜者们还编出许多故事。其中一个说，泰勒斯曾简单化解了爱奥尼亚五个城邦间的连年纷争，还使他们摆脱了外来入侵者的蹂躏。泰勒斯提出的城邦联盟终结了仇杀，带来了安宁。

毕达哥拉斯

数学历史上，在杰出的泰勒斯之后的下一个名字就是毕达哥拉斯（Pythagoras）。追随者们把他深藏在迷雾里，我们几乎不知道任何一点确切的有关他的东西。他四处游历，然后落脚在意大利南部的克罗托尼港（那时是希腊的殖民地）。在那里，他建立了著名的毕达哥拉斯学派。他的学派，除了研究哲学、数学和自然科学，还形成一个有着秘密礼仪的严密社团。关于毕达哥拉斯和他那社团组织，流传着很多故事。

35° 几何的诱惑

据说，毕达哥拉斯为了赢得学生，曾找来一个身无分文的年轻匠人，自愿教给他几何。为了让穷学生感觉听课很值得，老师答应每掌握一个定理就给他一块银币。这办法很合年轻人的意愿，他发现只要专心听课，一小时挣的钱比他平常劳作一天还多。随着银币多起来，学生不由自主地发现，他对学习的兴趣已经超过了对财富的兴趣。实际上，他已经彻底地被那学科的魔力俘虏了。他请求毕达哥拉斯教得更快一些，而且每学一个新定理，他愿意拿出一个银币。等学生学会了他能把握的所有定理，心满意足的老师也拿回了他所有的银币。

36° 数学物理的第一个记录

据说毕达哥拉斯有一个关于数字的惊人发现：音程依赖于简单的数字比。就是说，毕达哥拉斯发现，在相同张力下的同样的琴弦，8 度音程的长度应该是 2 比 1，5 度音程为 3 比 2，4 度音程为 4 比 3。这些结果显然是最早的数学物理事实，据说，它们启发了毕达哥拉斯对音阶的研究。[13]

毕达哥拉斯的那个发现已经流传了千百年。事情是这样的：一天，毕达哥拉斯路过一家五金店，被一阵“叮当”声吸引了。四个奴隶正挥着锤轮番打击一块火红的铁。有一只铁锤的声音特别悦耳。经过一番考察，毕达哥拉斯发现，音调的高低区别在于铁锤的不同重量。他向店老板借来铁锤。他把铁锤带回家，称了重量，然后把它们悬挂在四根一样长、一样粗的铁丝上。拨动铁丝，他听出那声音原来跟铁锤打铁的声音是一样的。然后，他在铁锤上粘一小把土，让声音走调，发出跟其他三个铁锤和谐的

13 中国人似乎更早就发现了音律与弦长的关系。成书于战国时期的《管子地员篇》记载了“三分损益法”，即根据一基本音高的弦长，然后通过损（乘以 2/3）或益（乘以 4/3）递次得出其他四度音。这与毕氏的五度相生律不完全相同。

声音。

然而，这流传多年的故事有一个大问题：铁锤打击铁砧所产生的音调与铁锤的重量无关。只要在铁匠铺多站几分钟，那些向后辈传播故事的饱学之士就会明白，整个故事在物理上是多么荒谬。



37° 大献祭

传说，毕达哥拉斯为了庆祝他那著名的直角三角形定理的发现，向诸神敬献了 100 头牛。关于这次献祭，道奇森（C. L. Dodgson，也就是 Lewis Carroll[14]）在 1895 年发表的《平行线的新理论》中写道：

> 但是，不论 30 年还是 3000 年，都不会磨灭几何真理的清澈和魅力。像“直角三角形斜边平方等于直角边平方和”那样的定理，在今天还像毕达哥拉斯第一次发现它时一样美妙绝伦。据说，毕达哥拉斯当年曾牺牲 100 头牛来庆贺那定理的出现——不过我一直在想，以这样的方式来崇敬科学，似乎有点儿夸张，而且没有必要。我们可以想想自己，即使在当今这堕落的年月，为了庆祝某个辉煌的科学发现，一两个好朋友，一块牛排、一杯酒，也就够了。而那可是 100 头牛！到哪儿去找那么些牛啊！

14 也就是那位著名的《爱丽思漫游奇境》的作者，他原本是数学家，本书后面有他的故事。

38° 一个文字游戏

在德国话里，愚蠢的人被称做“牛”。毕达哥拉斯在发现他著名的定理之后，牺牲了 100 头牛。从此，只要有新的真理被发

现，所有的“牛”都会怕得发抖。

39° 哲学家

假如下面那些言论真的出自毕达哥拉斯，那它们确乎概括了他的生活、个性和思想。

“我没有买卖，”他曾宣称，“我是一个哲学家。”

“那又是什么样的人呢？”有人问他。[15]

“这样的生活，”他解释，“可以比做奥林匹克运动。在运动场上，有的人来争夺花冠，追求荣誉；有的人一路叫卖，贪得财富；还有的人，比前面两种更加自在，他们来到赛场，既不为鼓掌欢呼，也不为得什么东西，纯粹是为了追赶时尚，享受运动。”

“同样，我们这些人，离开天国的家园来到这个世界，大家忙忙碌碌，追名逐利，只有极少的人能淡泊超然，专心研究自然。这样的人，我称为哲学家。”

40° 友谊

朋友是什么？毕达哥拉斯回答：“另一个我。”从此引出数的亲和性。能拿什么来描写比亲和数对 220 和 284 更亲密的关系吗？220 的真因子为 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110，[16]它们的和为 284；而 284 的真因子为 1，2，4，71，142，它们的和为 220。这两个数，一个能生成另一个；当然不会有比这更亲密的东西了。

41° 毕达哥拉斯的婚姻

很多老师都跟年轻的崇拜他的学生结婚，而毕达哥拉斯

15 据说，问他的人是费留斯（Philus）的独裁者莱昂（Leon），“哲学”一词就是这样第一次出现的。毕达哥拉斯告诉他：“最好的一类人献身于发现生命本身的意义和目的，揭露自然的秘密。我称这种人为哲学家，因为尽管没有谁是全能的智者，但他总能热爱智慧，把智慧当作打开自然秘密的钥匙。”（我们知道，“爱智慧”就是“哲学”一词的本来意义。）

16 正整数 N 的真因子指的是除 N 之外的所有 N 的正整数因子。注意 1 也是 N 的真因子。真因子还有一个多少有点儿陈旧的同义词：整除部分。（原注）

也许是第一个。据说，毕达哥拉斯最喜欢的学生是美丽的缇诺（Theano)，他主人米罗（Milo）的小女儿。缇诺无望地迷恋着她的老师，一个沉浸在学问而万事不关心的人。有一天，缇诺告诉他，她苦恋着一个人，却没有得到一点儿回报，她快被折磨死了，他听了非常惊讶。在毕达哥拉斯追问下，缇诺最后承认，她爱的那个男人就是老师自己。为了抚慰她狂野的心，甚至她的生命，毕达哥拉斯结束了他的苦行生活，和她结婚了。



拉斐尔《雅典学院》里的毕达哥拉斯

42° 毕达哥拉斯的教诲

毕达哥拉斯告诫他社团的同胞们，不要穿毛皮衣服（因为人的灵魂会轮回为动物)；假如有小路，就不要走大路（为了谦卑)；不要拿铁棍去拨动火苗（因为火苗是真理的象征)。更令人迷惑的是，他告诫同胞，不要坐在一夸脱的容器上，不要抚摸

公鸡，不要吃豆子。[17]他还告诫同胞要独身——尽管他和缇诺结婚了。

17 罗素在《西方哲学史》里从 John Burnet《早期希腊哲学》抄录了 15 条“诫命”，说“所有这些诫命都属于原始的禁忌观念”。（还有人解释，古希腊人拿豆子来投票，所以，老毕“不要吃豆子”的本意是不要与政治往来。）

43° 毕达哥拉斯的金腿

厌恶人类的哲学家赫拉克利特（Heraclitus）说，毕达哥拉斯是萨摩的一个石匠姆奈萨尔克（Mnesarchus）的儿子。又有人说他母亲有腓尼基人的血统，还曾陪着儿子游历。不过，在毕达哥拉斯的信徒们看来，主人的出生是神圣的，那圣父当然只能是阿波罗。毕达哥拉斯来自天上的证据，据说是他有着一条金腿。这个离奇的故事流传久远，甚至有人猜想，也许毕达哥拉斯真有什么身体缺陷，只不过被好事者越说越玄了。假如真是那样，那他的缺陷会是什么呢？

44° 毕达哥拉斯之死

毕达哥拉斯在克罗托尼的兄弟会的影响和贵族化倾向越来越大了，意大利南方的民主势力捣毁了他们的学校，社团也跟着解散了。毕达哥拉斯逃到麦特蓬托姆（Metapontum），在 75 或 80 岁高龄的时候，死在那里，或者被谋杀了。还有一个传说：老师离开信徒后，跑进一片豆苗田。他不愿践踏神圣的豆苗，于是选择了死亡。

45° 毕达哥拉斯证明他的定理

直角三角形斜边的平方等于两个直角边的平方之和，这个以毕达哥拉斯的名字命名的定理，一直被公认为他的独立发现。我们在故事 17 里看到，早在 1000 多年前，汉谟拉比时代的巴比伦人就已经知道这个定理了，不过它的第一个一般性的证明，则很

可能是毕达哥拉斯提出的。[18] 至于毕达哥拉斯的证明，历来有许多猜想，一般认为它可能属于如下图所示的那种分割式的证明方法。令 a，b，c 为给定的直角三角形的直角边和斜边，考虑图中的两个正方形，边长都是 $a+b$。第一个正方形被分割成 6 块：两个以直角边为底的正方形，四个全等于原来的直角三角形。第二个正方形被分割为 5 块：一个以斜边为底的正方形和四个全等于原来的直角三角形。从相等的量中减去相等的量，我们就看到，斜边正方形的面积等于两个直角边正方形的面积之和。

18 在《周髀算经》开篇，商高答周公问时说，大禹治水时代就有了"故折矩以为勾，广三，股修四，径隅五"的"勾股定理"。如果那对话是真的，应该在公元前 1100 年左右。

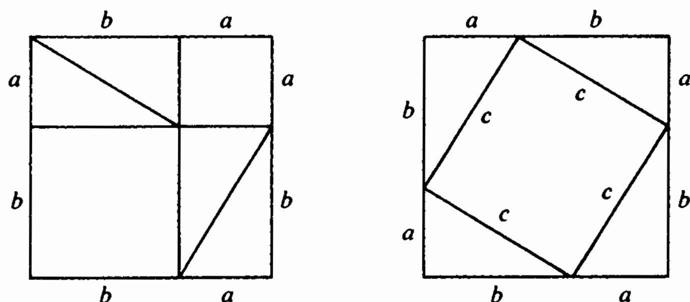


图 5

为了证明第二个分割中央的那块东西确实是边长为 c 的正方形，我们需要借助一个事实：直角三角形三个角之和等于两个直角。关于这个定理的一般情形，希腊评论家普罗克洛斯（Proclus）却把它归功于毕达哥拉斯。因为这个定理的证明需要知道一些平行线的性质，而人们也相信毕达哥拉斯发展过那个理论。

毕达哥拉斯兄弟会

46° 毕达哥拉斯兄弟会箴言

毕达哥拉斯学派追求知识本身，而不是它的利益，这个态度

可以很好用他的兄弟会的箴言来证明：

> 数字是前进的阶梯，
> 而不是金币的筹码。[19]

19 “A figure and a step onward, Not a figure and a florin.” 另一个说法是，“Honour a figure and a step before a figure and a tribolus”。据说，这句训诫跟前面拿钱换几何定理的故事有关。

47° 说自己

起初，毕达哥拉斯学派的信徒们非常崇拜他们兄弟会的这位创始人，假如有谁声称发现的荣誉归他本人，都会被认为大不敬。据说，信徒西巴索斯（Hippasus）就因为大不敬地宣扬他发现了正十二面体而遭了报应，翻了船被淹死在海里。

48° 兄弟会的忠诚

毕达哥拉斯兄弟会中一个年轻的穷会员在外地游历时得了重病，被送到附近的一家小酒店。善良的酒店老板对他悉心照料，尽管年轻人告诉他，自己身无分文，也没有什么可以报答的。意识到自己快死了，年轻人请店老板拿一块木板，他要画东西。他吃力地在木板上歪歪斜斜画出他们兄弟会的神秘的五角星符号（图6），转身对老板说：“我的好朋友，把这块木板挂在你的店门外。总有一天会有明白我画的游客经过，他会停下来问你这符号的事情。把一切都告诉他，你会得到回报的。”事情果然发生了。



图6
神秘的五角星也出现在浮士德的书房的门槛上。

49° 生死弟兄

公元前4世纪，两个叙拉古年轻人无比信奉毕达哥拉斯关于友谊的训诫，他们的名字后来成了忠贞不渝的友谊的同义词。芬

提亚斯（Phintias，有时错叫皮西厄斯，Pythias）被独裁者戴奥尼夏（Dionysius）以叛逆罪判了死刑。可怜的人请求延缓执行，让他先回附近的家安排后事。请求被批准了，不过要他找个人来替他蹲监狱，直到他回来。他的朋友达蒙（Damon）来了，而且答应，假如芬提亚斯没有按时回来，他愿意替他去死。芬提亚斯遭了意外，行刑的日子到了，还没赶回来。仍然坚信朋友的忠诚的达蒙被带到刑场。人群围过来，都可怜达蒙太轻信别人。这时，迟到的芬提亚斯气喘吁吁冲出人群，扑进朋友的双臂。两个人都争着替对方死。戴奥尼夏被这真诚的友谊感动了，释放了他们，还真心希望能赢得他们的友谊。

50° 三个问题

毕达哥拉斯兄弟会的每个成员每天晚上都必须问自己三个问题：我做错了什么？我做了什么好事？有什么应该做而没有做的事情？[20]

20 这自然令我们想起曾子的话："吾日三省吾身：为人谋而不忠乎？与朋友交而不信乎？传不习乎？"（《论语·学而》）

毕达哥拉斯主义

51° 灵魂的轮回

毕达哥拉斯宣扬灵魂的轮回，每个人的灵魂从一个肉体迁移到另一个肉体，甚至不同物种的肉体。尽管肉体充当了灵魂的坟墓和牢狱，但是，假如人们过一种足够纯粹的生活，他们的灵魂就能超脱肉体的桎梏。

传说，一个兄弟（或者就是毕达哥拉斯本人）曾看到一个克罗托尼公民鞭打他的小狗。兄弟要他住手，告诫他，他从小狗痛苦的嚎叫声里听到了已故朋友乞求怜悯的呜咽。"因为你正在

进行的罪孽，”兄弟告诉那公民，“我那朋友现在就是这条狗，而你是他粗暴的主人。在生命的下一个轮回，他可能成为主人，而你可能是狗。乞求他对你仁慈一些吧，别像你那么残忍。只有这样，他才会希望跳出轮回。”传说那公民立刻就住手了，还请求小狗宽恕他。这证明毕达哥拉斯学派在那时是多受人尊重。

52° 数主宰宇宙

毕达哥拉斯学派相信整数是万物的基元。甚至像理性、正义、人、健康和婚姻那样的观念，也跟整数等同起来。于是，整数主宰着宇宙，谁把握了整数的关系，他也就可能理解甚至指引宇宙的事物。

小整数还有着特别的意义。1，数的起点，是最受尊重的数字，是理性之数；2，第一个偶数，也是女性之数，代表思想的多样；3，第一个真正的男性之数，包容了统一与多样，代表着和谐；4，代表正义或报应，因为它意味着价值的平方；5，第一个结合了女性与男性的数，代表婚姻；6，是创生之数。

毕达哥拉斯的门徒殷勤寻找着那些整数之间的关系，走出了数论的第一步，同时也给未来的数字神秘主义开了先河。

53° 亲和数

前面说过（故事 40），两个整数，如果每一个数都是另一个数的真因子之和，就是所谓的亲和数。例如，毕达哥拉斯发现的 220 和 284 就构成一对亲和数。这对特殊的数字还带着神秘的色彩。很多人相信，刻着这两个数字的护身符能让佩带它的人们永葆完美的友情。假如其中一个人受到了伤害，即使被针扎了一下，远在地球另一边的伙伴也能感觉。在魔法、巫术、占星和算

命等活动中，这些数字扮演着重要的角色。

奇怪的是，以后再没发现新的亲和数。直到1636年，伟大的法国数论专家费马（Pierre Fermat）才宣布17 296与18 416结成另一对亲和数。两年后，法国数学家、哲学家笛卡儿（Descartes）发现了第三对。1747年，瑞士数学家欧拉（Leonard Euler）系统研究了亲和数，推出了30对，然后又扩充到60多对。[21]寻找亲和数的历史上，还有一件奇怪的事情。1866年，一个意大利少年帕格尼尼（Nicolo Paganini）发现了被忽略的相对较小的一对亲和数，1184与1210。今天，我们已经知道900多对亲和数。这些数对都有相同的奇偶性，就是说，同一对里的两个数要么同为奇数，要么同为偶数。所有奇数都是3的倍数，而所有偶数对的数字总和都是9的倍数。

21 2005年3月，人们发现了一对24073位的亲和数。

三个或更多数的序列将形成一个“亲和链”，假如其相邻的两个数都构成亲和数对。我们只知道两个亲和链。1918年，法国人普雷特（P. Proulet）发现了一条5个数的链：

12 496，14 288，15 472，14 536，14 264

还有28个数的链，起头一个数是14 316。只有3个数的亲和链叫“众”，还没发现呢。

54° 盈数、亏数和完全数

还有些数也与命运有着神秘而根本的联系，它们有时也被归功于毕达哥拉斯，那就是所谓的完全数、亏数和盈数。一个数，假如等于其真因子之和，它就是完全的；假如大于其真因子之和，它就是亏的；假如小于其真因子之和，它就是盈的。因此，上帝用六天时间来创造世界，因为6是完全数，$6=1+2+3$。另一方面，正如阿尔昆（Alcuin，735～804）说的，所有的人都来

自诺亚方舟的 8 个灵魂，这第二次创生不够完美，因为 8 大于 1 +2 +4，是亏的。这就解释了为什么我们今天的世界存在那么多的疾病。

1952 年时，我们才知道 12 个完全数，都是偶数，前 3 个是 6，28 和 496。欧几里得《原本》（约公元前 300 年）第 9 卷最后一个命题证明，假如 2^n-1 是素数，那么 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数。欧几里得公式给的完全数是偶数，而欧拉证明所有偶完全数一定具有这样的形式。是否存在奇完全数，依然是数论中著名的未解难题。假如有的话，那种数肯定不会少于 20 位。

1952 年，在 SWAC 数字计算机的帮助下，发现了另外 5 个欧几里得形式的完全数，对应于 $n=521$，607，1279，2203 和 2281。1957 年，瑞典 BESK 计算机发现了 $n=3217$；1961 年，IBM7090 发现了 $n=4253$ 和 4423。再没有别的 $n<5000$ 的完全数了。

$n=9689$，9941 和 11 213 也得出完全数，将已知的完全数扩充到 23 个。$n=11\ 213$ 的完全数是 1963 年在伊利诺斯大学发现的。这是一个 6751 位的大数，有 22 425 个因子。伊利诺斯大学数学系为发现这个当时最大的完全数而感到骄傲，甚至在他们的信封盖上长方形邮戳：“$2^{11\ 213}-1$ 是素数”。[22]

22 2005 年 2 月 18 日，德国的眼科医生 Martin Nowak 发现了目前最大的素数：$2^{25\ 964\ 951}-1$，有 7 816 230 位，它当然对应着一个“天大的”完全数。

更大的完全数一个接着一个被发现，证明巴娄（Peter Barlow）当年的话是多么荒谬。他在 1811 年的《数论》中，就第九个完全数（相应于 $n=61$）说：“这是可能发现的最大的完全数了，因为，它们除了好奇没有别的作用，恐怕不会再有人想去找比它更大的了。”

从 10 到 100 间，只有 21 个盈数，都是偶数。但并非所有盈数都是偶数，实际上，很容易证明 $945=3^3\cdot5\cdot7$ 是盈数，这是

第一个、也是1000以内的惟一一个奇盈数。

55° 毕达哥拉斯的哲学和几何的灾难

毕达哥拉斯怀着萨沃纳罗拉（Savonarola）的激情宣扬天下万物——没有例外——都依赖于整数。于是我们可以想象，当一个兄弟发现$\sqrt{2}$不是有理数——不能表达为两个整数之比，因而似乎也就与整数无关——在毕达哥拉斯的信徒们看来，该是多么恐慌的事情！这个可怕发现对应的几何事实也同样令人惊讶。因为，假如$\sqrt{2}$不是有理数，那么正方形的边与对角线将没有共同的单位以整数度量它们的长度。而人们凭直觉坚定地相信，任何两个线段都有共同的度量单位（哪怕很小、很小的单位），这就产生了矛盾。而整个毕达哥拉斯的比例理论和相似图形的理论都建立在这似乎显而易见的假设基础上。在这致命的打击下，毕达哥拉斯的哲学基础和许多几何功绩都摇摇欲坠了。据说，这个“逻辑丑闻”太可怕，有人试图把它遮掩起来；还有传说，第一个把秘密泄露出去的门徒，被兄弟会驱逐，他们还为他修了坟墓，就当他已经死了。

56° 证明毕达哥拉斯

每个学大学数学的同学，都熟悉19世纪末以前的惊人的数学成就，它们从关于正整数的假设出发，不需要更多的假定，就得到了所有整数的集合，然后得到所有有理数的集合、所有实数的集合。因为无理数（如$\sqrt{2}$）属于实数，于是我们看到，至少在实数系统下，古老的毕达哥拉斯信仰在今天得到了证明：万物都依赖于所有的数。

57° 毕达哥拉斯主义的证据

毕达哥拉斯说数就是万物，但除了分析音阶之外，他并没提出过其他强有力的例子来证明他的观点。我们也不指望他能做什么，因为他那个时代的科学还处在非常原始的水平。不过，假如我们问现代自然科学家是否相信能通过数来完美地理解世界，答案绝对是肯定的。

自然科学的系列关键发现证明，毕达哥拉斯的数字主宰宇宙的思想确实有着牢固的事实基础。想想伽利略的落体运动定律、开普勒的行星运动定律、牛顿的引力定律、库仑的电流定律、麦克斯韦的电磁波方程、普罗特（Prout）的定比定律、道尔顿的多比定律、爱斯尔（Romé de l'Isle）的晶体面角守恒定律、阿雨（Hauy）的有理指标定律、[23] 杜隆－珀替（Dulong-Petit）的固体比热定律，法拉第的电解定律、夫朗霍菲（Fraunhofer）衍射光栅实验产生的光谱、斯特藩的辐射定律、普朗克的量子、门捷列夫的化学元素周期表、薛定谔的波动方程，等等，等等。

23 1783 年，法国矿物学家 Isle（1736～1790）在观测了 400 多种矿物晶体后，发现“相同物质的所有晶体具有相同等级的对称性”；晶面夹角是一个常数，这是晶体学的第一个定律。后来，Hauy 发现，晶体的晶面在三个坐标轴的截距可以简单表示为三个整数之比，即“有理指标定律”（那三个数叫 Miller 指标）。

柏　拉　图

“西方世界一切哲学家中最崇高、最迷人、最受人爱戴的”柏拉图，公元前 427 年出生在雅典（或雅典附近）。他在那儿跟苏格拉底学哲学，然后开始他的智慧漫游，在南非海岸跟昔兰尼（Cyrene）的西奥多罗（Theodorus）研究数学，成为著名的毕达哥拉斯弟子阿尔希塔斯（Archytas）的亲密朋友。大约公元前 387 年，他回到雅典，建立了著名的雅典学院，一个系统探求哲学和科学的机构。他的后半生都在管理他的学院，公元前 347

年，老人死了，享年80岁。公元前4世纪的重要数学工作，几乎都是柏拉图的朋友和学生们完成的，他的学院因而成为承前启后的纽带，联系着之前的毕达哥拉斯学派和之后的亚历山大数学学院。雅典学院延续了900年，直到公元529年，基督徒们从东罗马帝国皇帝拿到一纸法令，才永久地关闭了它的大门。

58° 柏拉图格言和训练转移

柏拉图对数学的影响不是因为他有什么数学发现，而在于他热忱地相信，数学研究是思想训练的理想场所，从而对哲学家的培养，对理想国的未来统治者的成长，都是至关重要的。难怪他在学院的大门写下这句著名的格言：

> 不懂几何者不得入内。

于是，在柏拉图看来，数学的逻辑元素和数学研究带来的纯粹的思想精神，使它成为无上崇高的东西，因为这一点，数学在学院的课程里也占据着重要的地位。

最近几十年来，关于智力训练和训练的转移，发生了激烈的争论，分化为两个极端。喜欢柏拉图的人宣称，数学的研究培养了学生对真理的尊重，从而形成正直的品格；它还培养了整洁的习惯，专心致志的作风，特别是精密思考的能力。但机械论心理学的出现，给这些主张的效能带来很大疑问，而且，事实也证明，训练的转移并不是彻底、自觉和不可避免的。在学数学的那些学生中有许多不诚实、不整洁的例子，他们也不能清晰思考非数学的问题。不分青红皂白的人却认为，这意味着训练的转移是不存在的。今天，心理学家似乎同意，真理应该在两个极端之

间，假如怀着某种特定的目的来教一门学科，训练的转移才可能发生。

59° 查斯勒斯与卢卡斯的假信

[下面的故事是真的，与前一个故事有关，可乐、可怜，还有一点儿难以置信。蒙罗森鲍姆（R. A. Rosenbaum）主任的允许，[24]我们在这儿借用他在《数学教师》1959 年 5 月号 365 ~ 366 页“历史讲述”专栏里的优美叙述。]

24 1979 年，罗森鲍姆教授在卫斯理大学发起了“提高数学认识计划”（PIMMS），“旨在通过高水平的专业教师培训计划以提高所有学生的数学和科学教育”。

教育常考虑“转移”问题。例如，数学研究是不是能培养逻辑思维的习惯，并在分析其他推理学科的问题时发扬光大？关于这一点，我们不妨来考察专业数学家的行为，看看他们是不是在生活的数学方面表现了突出的逻辑作风。结果，数学家们表现的荒唐行为令多数观察者苦笑不已。最有趣的还是查斯勒斯（Michel Chasles）和伪造的亲笔信。

查斯勒斯是 19 世纪最有名的几何学家之一，他 1837 年作为布鲁塞尔科学院备忘录而发表的《几何方法的起源和发展的历史概述》（*Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en Géométrie*…），是一篇非凡的综合与普遍的作品，立刻为他带来了名声。他为几何贡献了很多定理，所谓“代数对应原理”就以他的名字命名。伯特兰（Joseph Bertrand）经常引用的一句话说：“欧洲的所有几何学家都是查斯勒斯的门徒。”[25]

25 关于伯特兰（1822 ~ 1900）本人，有张宣传画表达了他著名的猜想：“我对你说过，我还要说：在 n 和 $2n$ 之间总存在素数。”这个 1845 年的问题，5 年后就被俄罗斯的切比雪夫证明了。

但查斯勒斯是一位强烈的爱国者，他的法国式的民族自豪感也带来了灾难。有人给他看一些信，说是帕斯卡写的，其中还确立了引力定律，于是他急切想买下来，这可是法国人领先英国牛顿的证据啊！学者兼藏书家的查斯勒斯，加上满意的收入，在 1861 到 1869 年间不断从一个叫卢卡斯（Vrain ~ Denis Lucas）的

人手里购买文献。

他的收藏似乎难以置信。他买了27 000多封信，花了140 000法郎。175封是帕斯卡写给牛顿的，139封是帕斯卡写给伽利略的，还有大量伽利略的信。但卢卡斯还拿出了古代非数学家的信。查斯勒斯购买的信件中，还包括6封亚历山大大帝给亚里士多德的，1封克利奥帕特拉（Cleopatra）给恺撒（Caesar）的，[26]1封抹大拉的玛利亚（Mary Magdalene）给拉撒路（Lazarus）的，[27]还有1封给圣彼德的。每封信都写在纸上，而且全是法文的！看来，那27 000多封信，激情澎湃的查斯勒斯很多都没看过。

当查斯勒斯向法国科学院报告他关于帕斯卡领先牛顿的发现时，大家都很怀疑。查斯勒斯展示了他收藏的一些信件，不过有人指出，它们的笔迹与那些确定为帕斯卡信件的笔迹有所不同。那些信件还出现了五花八门的时代谬误，但每个疑难都被卢卡斯新拿出的信件应对过去了。经过几年的争论，查斯勒斯认输了。他拿出了全部的27 000封假信，而卢卡斯被送进监狱呆了两年。

卢卡斯在审讯时的辩护很有意思。他坚持认为自己没做什么错事——查斯勒斯买的东西货真价实，广泛报道的那些争论和检验激发了大众对历史的兴趣，学术的争论比以往任何时候都更令人振奋，而他本人则纯粹是为了爱国才那么做的。

人们奇怪查斯勒斯那么轻易就上当了，同时一定也惊讶卢卡斯的“殷勤”：把27 000封信做成古董，该是多么艰巨的任务！显然，他每天会花很多时间在图书馆里，为他“写信”准备知识。因为不懂希腊文，也不懂拉丁文，他工作起来困难重重。据法勒尔（J. A. Farer），[28]没人知道卢卡斯入狱后的事情。但伯特兰报告说，卢卡斯出狱后，又回到老本行，结果因惯犯又被判了三年。查

26 这是有名的故事，借古罗马历史学家普卢塔克的一句话来说：“埃及艳后克利奥帕特拉令人难以抗拒的美貌和风情万种的仪态使恺撒大帝为之倾心。”

27 与圣母同名的抹大拉的玛利亚，也是耶稣的朋友，并看到他上十字架。在卡扎赞斯基（Nikos Kazantzakis）《基督的最后诱惑》中，抹大拉成了耶稣的情人，还与他结婚生子。纪伯伦在《人子耶稣》里也写了二位的感情。拉撒路是玛利亚的弟弟，死后又被耶稣复活了。相关的故事见《新约》的《约翰福音》。

28 J. A. Farrer, *Literary Forgeries*, Longmans, Green, and Co., 1907, Chap. xii.（原注）

斯勒斯挖苦说："一开始就判他五年，岂不更好吗？"

查斯勒斯显然被这件事情弄得狼狈不堪，伯特兰说，那人够倒霉了——应该忘记过去的事情。但法勒尔却忍不住还要在伤口上撒点儿盐，那也许是对我们所有人的警告：

> 查斯勒斯在他那些宝贝引发的整个争论中所表现的逻辑上的无能，决定性地证明了数学研究带给推理能力的好处是多么苍白。一个国家的一流数学家，似乎并不比一个小孩儿更会推理。

60° 柏拉图的数命论

柏拉图深受毕达哥拉斯学派的影响，从他本人的数学信仰来看，他的内心似乎是相信数字命运的。在他所有的著作中，再没有什么玄之又玄的词句像《理想国》第八卷那段话更令人疑惑：

> 神圣的产生物有一个完善的数的周期；而有灭亡的产生物的周期只是一个最小的数——一定的乘法（控制的和被控制的，包括三级四项的），用它通过使有相同单位的有理数相似或不相似，或通过加法或减法，得出一个最后的得数。
>
> 其4对3的基本比例，和5结合，再乘3次，产生两个和谐；其中之一是相等因子相乘和100乘同次方结合的产物，另一个是有的相等有的不相等的因子相乘的产物，即，其一或为有理数（各减1）的对角线平方乘100，或为无理数（各减2）平方乘100，另一为3的立方乘100。这全部

的几何数乃是优生或劣生的决定性因素。如果你们的护卫者弄错了，在不是生育的好时节里让新郎新娘结了婚，生育的孩子就不会是优秀的或幸运的。[29]

读者也许想试着解读这段奇异的神谕似的句子。不过，就连柏拉图最亲近的追随者们也没能解开它，过了2300年，我们才有一个满意的解释。1923年，20世纪初的英国著名数学家扬（Grace Chisholm Young）在《伦敦数学会纪事》上发表了一篇迷人的文章。我们要读扬女士的原文，才能欣赏她那透彻的分析。她的一个非凡结论说，柏拉图猜想（也可能证明了），同时满足

$$x^2+y^2=z^2 \text{ 和 } x^3+y^3+z^3=w^3$$

的互素的整数，只有 $x=3$，$y=4$，$z=5$，$w=6$。

29 这段文字有许多译法（“不译”也是一种，例如 John L. Davies 和 David J. Vaughan 的英译本就选择“不译”，“因为我们发现那是不可能的”；他们提供的解释似乎也不令人满意）。即使译出来了，我们也看不明白。这里借用了商务印书馆“汉译世界学术名著丛书”《理想国》的文本（郭斌和、张竹明译），因为它的文字似乎最接近本书引用的英译本。相对说来，牛津大学 Jowett 的英译本似乎更“浅显”一点，没有那么多奇怪的数学文字。

61° 柏拉图体

如果一个多面体的所有面都是全等的正多边形，所有多面角也全等，我们就说它是正多面体。奇怪的是，有无限多种正多边形，却只有5种正多面体。正多面体根据面的数目来命名，也就是，4个正三角形的正四面体，6个正方形的正6面体（立方体），8个正三角形的正8面体，12个正5边形的正12面体，20个正三角形的正20面体（图7）。

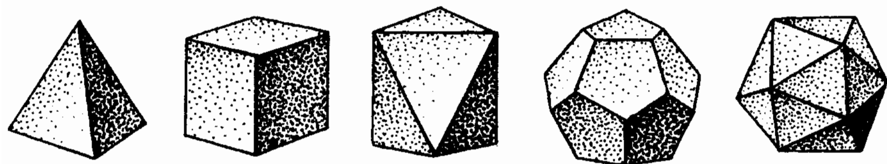


图7

正多面体发源史已消失在过去的烟云里。欧几里得《原本》第8卷才开始以数学的眼光来看它们。这一卷的第一个注释（完全可能是后来补充的，也许来自格米努斯（Geminus））指出，本卷“将处理所谓的柏拉图固体，那名称实在是错了。因为其中的3种，正4面体、立方体和正12面体来自毕达哥拉斯学派，而正8面体和正20面体来自泰阿泰德（Theaetetus）。”事实也许真是这样。

不管怎么说，柏拉图描绘了5种正多面体。他在《蒂迈欧篇》里讲了如何拿正三角形、正方形和正五边形来构造正多面体的面。柏拉图的蒂迈欧（Timaeus），就是毕达哥拉斯门下的洛克里的蒂迈欧。柏拉图大概在访问意大利时见过他。在柏拉图的作品里，蒂迈欧神秘地将四种容易构造的固体——正4面体、正8面体、正20面体和立方体——配给恩培多克勒（Empedocles）的一切物质的四种基本“元素”：火、气、水和土。剩下的那个正12面体很难解释，就特意拿它来联系包围我们的宇宙。[30]

30 柏拉图只是含糊地说“上帝用它来安排天空的群星”；有趣的是，在更早的《斐多篇》(*Phaedo*)里，柏拉图说地球看起来像12张皮构成的多色球。更有趣的是，近年发现，宇宙似乎是无限多个正12面体重复组成的（*New Scientist*, Oct., 2003）。

62° 开普勒对蒂迈欧关联的解释

后来，大天文学家、数学家和数命专家开普勒（Johannes Kepler，1571～1630）为5种柏拉图体的蒂迈欧关联提出了独特的解释。关于那些规则固体，他凭直觉假定，正4面体表面包容了最小的体积，而正20面体包容了最大的体积。[31]这些体积与表面的关系，分别是干和湿的属性。因为火是四种“元素”里最干的，而水是最湿的，所以正4面体一定代表着火，正20面体代表着水。立方体代表土是因为立方体的四角都立在它的一个四方面上，具有最大的稳定性。另一方面，用食指和拇指拿住正8面体的两个相对的顶点，很容易让它旋转，因而有着空气般的不

31 开普勒的直觉出了点儿问题（见65和注）。

稳定性。最后，正 12 面体关联着宇宙，因为它有 12 面而黄道有 12 宫。

63° 自然里的柏拉图体

我们能在自然状态的甲烷、普通食盐和明矾的晶体分别看到正 4 面体、立方体和正 8 面体的结构。其余两种正多面体不能以晶体形式出现，[32] 但我们发现它们是微小的海洋动物放射虫的骨架。

64° 开普勒的行星系统

开普勒对 5 个柏拉图体的神秘敬畏，超越了它与四种基本“元素”和整个宇宙的关联。在他看来，那 5 个多面体不但解释了行星的数目（那时只知道 5 颗行星[33]），还说明了行星是如何分布在太阳周围的空间的。在 1596 年出版的《宇宙的秘密》（*Mysterium cosmographicum*）里，开普勒写道：

> 地球的轨道是一个圆：包围着圆所在的天球的外面是一个正 12 面体；在包围它们的外面是火星轨道。包围火星的是一个正 4 面体；它们的外面是木星轨道。包围木星轨道的是一个立方体；它们的外面是土星轨道。另外，在地球轨道的里面，内接着一个正 20 面体；内接于它的圆是金星轨道。金星轨道内接着一个正 8 面体；内接于它的圆是水星轨道。这就是有那么些行星的理由。

我们看到，开普勒是一个地道的毕达哥拉斯信徒。他甚至还提出，毕达哥拉斯的灵魂说不定就寄居他的身体里。

32 2000 年，一个德国和美国的科学家小组构造了 C_{20}（可能的最小富勒分子），就有正 12 面体的晶体结构（Horst Prinzbach, etal.，*Nature* 407, 60 ~ 63, 07 Sep. 2000）。

33 当然，指除地球外的那 5 颗行星。

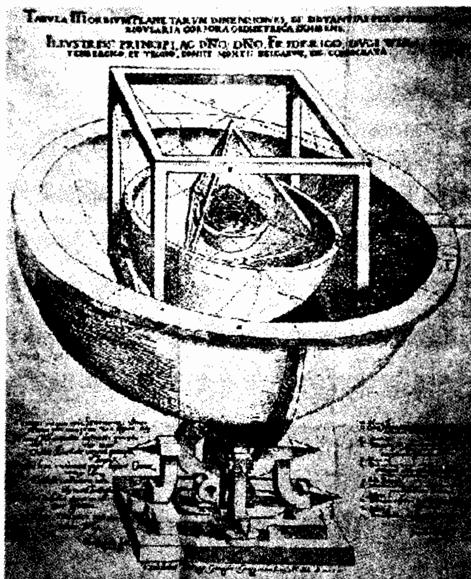
65° 柏拉图体的问题

（1）前面关于正多面体的定义，包含 3 个性质：正多边形的面，全等的面，全等的多面角。许多立体几何课本没有列出全部性质。感兴趣的读者也许可以通过几个反例来证明那 3 个条件都是必需的。

（2）根据（1）列举的 3 个性质，我们可以发现多面角都是正的。请读者自己证明这一点，这也就证明 3 个性质可以归结为 2 个：正多边形的面和正多面角。

（3）没经验的人几乎直觉地相信，内接于同一个球的正 12 面体（有 12 个面）与正 20 面体（有 20 个面），正 20 面体的体积更大。请读者证明，事实恰好相反；读者还可以证明，内接于同一个球的立方体(6 个面)和正 8 面体,立方体的体积更大。[34]

34 如果把正 4,6,8,12,20 面体内接一个球体,那么它们分别占据的体积比例为 12. 2518%, 36. 7553%, 31. 8310%, 66. 4909%, 60. 5461%。如果都以 1 为边长,则 5 个正多面体的体积分别为 0. 1173,1, 0. 4714, 7. 6631, 2. 1817(这些体积的表达式分别包含了 5 和 2 的平方根)。



开普勒 1596 年版《宇宙的秘密》中的行星系统。两个行星天球之间隔着一个正多面体。

（4）有趣的是，内接于同一个球的正12面体和正20面体有着共同的内接球。请读者证明这一点，并说明它对内接于同一个球的立方体和正8面体也是正确的。

（5）前面说过，开普勒凭直觉假定，对一定的表面积，正8面体包容了最小的体积，正20面体包容了最大的体积，真是这样吗？

（6）如果正12面体、正20面体和立方体内接于同一个球，请证明正12面体的体积与正20面体的体积之比，等于立方体边长与正20面体的边长之比。

（7）欧几里得《原本》第14卷指出，海普希克勒斯（Hypsicles）发现，如果正12面体与正20面体内接于同一个球，那么二者的体积之比等于表面积之比。请证明。

（8）证明内接于同一个球的正12面体和正20面体具有相等的表面的周长。

66° 得洛斯人的问题

柏拉图出生那年（或那年前后），雅典发生瘟疫，大多数人都死了。也许是灾难的刻骨铭心，才生出一个著名的古希腊数学难题。[35]据说，一个公民代表来到得洛斯岛的阿波罗神殿，祈求逃避瘟疫的良方。神谕阿波罗像前的立方体祭坛须扩大一倍。于是，雅典人奉命把祭坛的边长都扩大一倍，可瘟疫没有平息下来。人们回到神殿，询问失败的原因。神告诉他们，他们没有执行神的命令；他们没把祭坛加倍，却让它成了原先的8倍。这就引出一个几何问题：确定立方体的边，使它的体积是原先的2倍。问题一直没解决，据说后来传到了柏拉图，他又把问题转给几何学家。就是这个故事流传着倍立方的问题，人们经常称它为

35 难题的更可能的来源，见246。（原注）

得洛斯人（Delian）问题。不论故事的真假如何，问题是实在的，柏拉图学院研究过它，还有归在欧多克斯（Eudoxus）、梅内赫莫斯（Menaechmus）甚至柏拉图本人（可能是误传）名下的一些高等的几何解法。

欧几里得

很遗憾，欧几里得的生平和个性，我们几乎一无所知；我们只知道他是著名的亚历山大博物馆（大约公元前300年开幕）的第一个数学教授，[36]而且显然也是杰出而流传久远的亚历山大数学学院的创始人。我们甚至不知道他的出生年月和地点，但可以猜测他曾在雅典的柏拉图学院接受数学训练。尽管他至少拥有10部著作，而且有5部相当完整地流传到今天，但他的名声却主要来自《原本》。《原本》一出来，就赢得了崇敬。也许除了《圣经》，再没有什么书像《原本》那样被广为流传、编辑和研究，像它那样对科学思想产生巨大的影响。

36 博物馆"Museum"的本义是缪斯（Muse）女神庙，实际上是一个政府的研究机构。不久，它成为希腊人文和自然科学的最高研究中心。

67° 几何的皇家大道

欧几里得的故事，只有两个流传下来，而且两个都可疑。普洛克拉斯（Proclus，410～485）在《欧德缪斯总结》[37]中告诉我们，埃及国王托勒密一世索特（Ptolemy Soter）、亚历山大博物馆的创立者，为了表示对博物馆的关心，也曾在欧几里得门下学几何。他发现那学科太难了。一天，他问老师，还有没有别的更容易的办法。欧几里得回答说："哦，王爷，在现实世界里有两种路，普通百姓走的路和王爷走的路。但在几何里没有皇家大道。"

37 后人认为，在普洛克拉斯评述《原本》的文字里，可能有些材料来自欧德缪斯（Eudemus）的《几何史》，其中特别长的一段被称为 *Eudemian Summary*。

这个故事也被说成是别人的事情，斯托比亚斯（Stobaeus）讲



欧几里得(300～275 B.C.)

的就是梅内赫莫斯（Menaechmus）在亚历山大大王身边的故事。

因为很多学生的代数能力远远强过他们的几何能力，于是，人们说以代数方法来研究几何问题的解析几何，就是欧几里得认为不存在的“几何的皇家大道”。

68° 欧几里得和学生

欧几里得流传到今天的第二个故事，是斯托比亚斯(Stobaeus）在给儿子编的“格言大全”里讲的，很有趣但也不大可靠。欧几里得的一个学生，在学过第一个命题之后，问老师说：“可这有什么好处呢？我学这些东西能得到什么呢?”欧几里得马上叫来一个仆人，“给这伙计一块银币，因为他想学有所获。”

69° 欧几里得《原本》与牛顿《原理》

德摩根(Augustus De Morgan)曾说,“欧几里得的13卷书是巨大的进步,也许甚至比牛顿《原理》中的内容更伟大。”



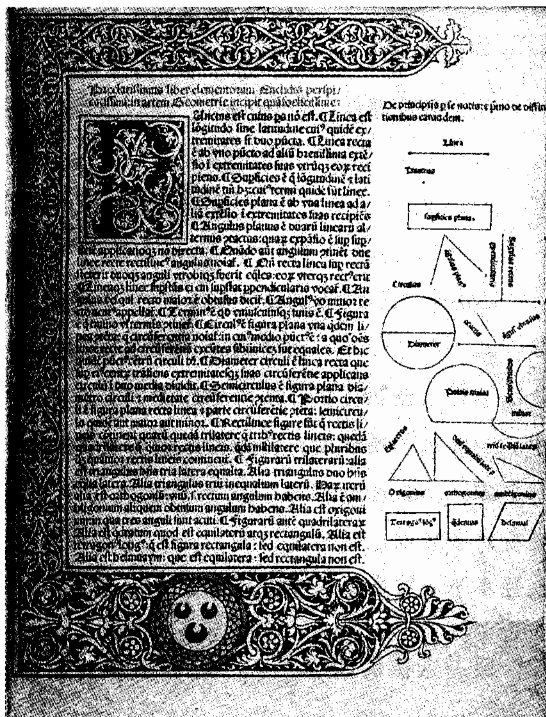
现存最早的欧几里得的手稿

70° 科学史上最著名的一个命题

命题：假如一条直线与两条直线相交，直线同一侧的两个夹角之和小于两直角，则此二直线，假如无限延伸，将在两夹角小于两直角的一侧相交。

这算什么？这是欧几里得《原本》第五公设，即所谓的平行公设。

为什么出名？这个公设不像欧几里得的其他几个公设那么简洁，也不那么一目了然，于是引出许多纷争。两千多年来，学者们一直不满意公设的这样一种陈述方式，几何学家或者尝试从欧几里得的其他公设和公理导出它，或者试图以更能接受的等价的形式来取代它。对第五公设的关心，刺激了许多现代数学的发


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

欧几里得的《原本》

展，也激发人们深入探询几何学的哲学和逻辑基础。更重要的是，它将几何从传统模式解放出来，产生出后来的许多不同于欧几里得的同样和谐的几何学。实际上，它也给整个数学带来了自由的气息。它沉重打击了数学的绝对真理的观点，革新了对公设本质的认识。数学的出现，是人类思想的自由创造，而不是我们生活的世界派给我们的什么必然产物。

谁给它命名的？凯瑟（Cassius J. Keyser），见他的《数学哲学》(*Mathematical Philosophy*, New York: E. P. Dutton and Company, Inc., 1922. p. 113.)

71° 科学史上最富成果的一个问题

这个问题是："为什么?"

阿基米德

有史以来最伟大的数学家之一，当然也是古代最伟大的数学家，就是阿基米德，出生在西西里岛的叙拉古（那时属希腊）。他生于公元前287年，死在公元前212年罗马人对叙拉古的掠夺中。年轻时在亚历山大博物馆跟欧几里得的后人学数学，后来回到老家，耕耘他的数学。阿基米德流传下来的作品有10多件，还有许多可以追溯的散佚的东西。这些作品对数学的最大贡献，也许在于萌芽了某些整数的计算方法。

72° 阿基米德的豪言

普卢塔克（Plutarch，约46～102）在《马塞卢斯传》（*Life of Marcellus*）里说，阿基米德曾宣扬，假如有一个立足点，那么他能移动地球。叙拉古的希罗（Hiero）王听了很惊讶，就真叫阿基米德去移动一些大东西来证明他的宣言。他让阿基米德把一只大船拉下水。船停在码头岸边，船上站满人，没有大队人马齐心协力是不可能把船拉动的。令大王和观众们目瞪口呆的是，我们的大数学家和物理学家却安逸地坐在海滩的椅子上，他通过复杂的滑轮装置，只用一只手就毫不费力地把船拖进了大海。

73° 阿基米德保卫叙拉古

阿基米德的举手之劳就把满载的大船拉下海，令希罗王惊奇

无比。于是，当罗马将军马塞卢斯兵临叙拉古城时，他请阿基米德帮助他守城。有许多故事讲过阿基米德为守城发明的天才器械。石弩从堡垒的洞口射出巨石，落在远处敌人的头上；从可移动的洞口射出巨石，砸向逼近城墙的敌船；巨大的吊钩从水中吊起敌船，敌人在恐慌和颠簸中眼看着船身断裂。后来还有故事说，阿基米德曾用巨大的镜面来点燃敌人的大船，这可能是真的。阿基米德令敌人丧胆。据说，他只需要在城头悬一根绳子，敌人就不敢靠近，害怕他背后有什么机关。因为阿基米德的器械，叙拉古顶住了罗马人近 3 年的围困。后来，叙拉古人在一次庆典中得意忘形，城池终于陷落了。

74° *Eureka*

阿基米德做事当然专心致志，很多故事说他在专注一个问题时常常忘了身边的事情。人们经常说起的一个故事，是关于希罗王的王冠和金匠骗子。

希罗王很想要一顶金冠，他把一定重量的金子交给一个金匠，还吩咐他怎么做。金匠按时做好金冠，献给国王。虽然金冠重量没有问题，国王还是怀疑金匠拿银偷换了一些金。王爷不想把金冠砸碎来看里面是否藏着银，就把困惑告诉阿基米德。阿基米德也曾大惑不解。一天，他在公共浴室洗澡，突然发现了静水压力的第一个定律，也就解决了王冠的问题。他兴高采烈，忘了穿衣服，就跑出澡堂，叫喊着跑过大街："Eureka，Eureka"（"我找到了，我找到了！"）

后来，著名的静水压力第一定律成为阿基米德《论浮体》（*On Floating Bodies*）第一卷的第 7 个命题。如今，每个中学生都在物理课中学过这个定律。它告诉我们："浸在流体中的物体

所受的浮力等于它所排开的流体的重量。”这意味着，两个材料不同而质量相同的物体，体积更大的一个在水中会失去更多的重量。因为相同质量的银比金的体积大，所以银在水中的重量会比同样质量的金发生更大的变化。于是，阿基米德要做的，就是把王冠放在天平的一边，把一块相同重量的金放在另一边，然后将它们浸在水里。在这样的状态下，假如王冠里藏了银，那么金块将比王冠重。传说王冠的一端浮起来了，也就暴露了金匠的奸诈。

75° 阿基米德螺旋管

阿基米德有一个发明，至今还在世界许多地方应用着，那就是所谓的“阿基米德螺旋管”。它是一根两端开口的管子，螺旋地缠绕着中心的圆柱（如图 8）。螺旋管的一端浸在水里，螺旋的中心轴倾斜足够的角度。在轴的顶端有一个把柄，转动把柄，装置就活动起来。如果螺旋轴的倾斜角度大于螺旋管的倾斜角度，那么水将沿着管道从顶端流出。埃及人用阿基米德螺旋管来灌溉土地，排除洪水；船舱进水了，也常靠它来抽干。

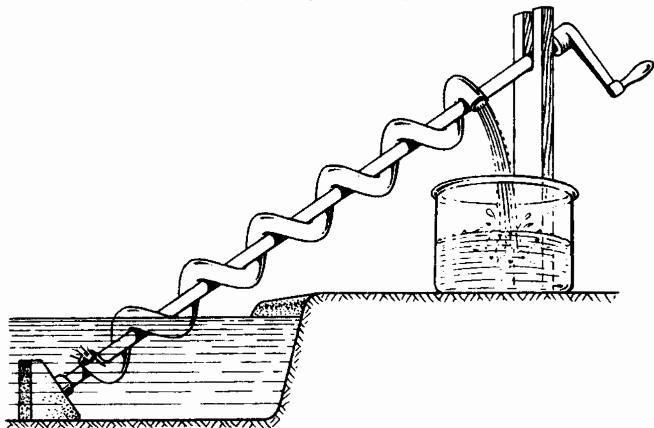


图 8 阿基米德螺旋管

76° 阿基米德的肚皮

据说，阿基米德做几何，常用壁炉的烟灰画图，洗澡时还用涂在身上的油来画图。如果真是那样，我们应该惊奇，多少奇妙的几何是从人的肚皮上的图形中发现的啊！

77° 阿基米德之死

阿基米德是在叙拉古陷落时死的。关于他的死，有几种不同的说法。

一个故事说，阿基米德不知道叙拉古已经被马塞卢斯占领了，当一个凶恶的罗马士兵闯进他的房间时，他还在专注沙盘里的一个图形。看到图形上的影子，阿基米德挥手让他退出去，把图形亮出来，恼怒的侵略者却拿长矛刺穿了老人的身体。

另一个故事说，一个罗马士兵走进阿基米德的书房，让他跟他去见马塞卢斯。阿基米德正忘情地想着一个问题，他答应证明了问题后跟他走。被激怒的士兵立即就拔出剑来刺进了老人。

也有故事说，一个罗马士兵迎面碰上阿基米德，就要杀他。阿基米德请他等一会儿，让他先了结一个未解的问题。但士兵无动于衷，立刻就杀死了这位伟大的数学家。

还有故事说，阿基米德正把一些珍贵的数学器械给马塞卢斯送去，士兵看见了，以为他扛着金子，就把他杀了。

普卢塔克说，再没有什么事情像阿基米德之死那样令马塞卢斯痛苦了。这位罗马将军曾下令任何人不得伤害那个伟人。我们只能想象他该是何等愤怒，而那违命的士兵该落得什么下场。

78° 可疑的镶嵌画

梅茵河畔法兰克福的市立艺术研究所有一幅镶嵌画，一位可敬的学者坐在沙盘台前的椅子上。他回头看着身后，一个罗马士兵正向他挥舞着长剑，似乎要他站起来跟他走。这幅镶嵌画似乎生动地描绘了阿基米德的最后瞬间。

人们最近发现，镶嵌画是在几年前挖掘庞培古城（在公元79年的一次火山喷发中被埋葬了）的时候，从一间屋子的地板下发现的。现在相信，这种说法是假的。人们认为，那幅镶嵌画是某件早期作品的16世纪的复制品，或者也许根本就是伪造的。于是，另一个有趣的小故事就不可信了，至少是疑问重重。



阿基米德的最后时刻

79° 阿基米德之墓

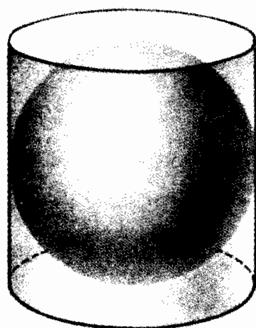


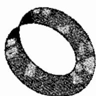
图 9

阿基米德在他《论球与柱》中建立了我们今天计算球体体积和面积的公式。基本图形是内接在半径 r、高 $2r$ 的正圆柱体中的半径 r 的球（图 9）。阿基米德证明，球的体积正好等于外接圆柱体积的三分之二，球的面积正好也等于圆柱表面积的三分之二。阿基米德当然为这些发现感到自豪，还立下一个遗愿，在他的墓碑上刻一个内接在圆柱里的球。当马塞卢斯怀着崇敬厚葬阿基米德时，特别吩咐要了却他的心愿。

多年以后，公元前 75 年，西塞罗（Cicero）到西西里做罗马检察官。他打听阿基米德的墓，可令他惊讶的是，叙拉古人一无所知，甚至说根本就没有什么墓。西塞罗费了很大气力，小心巡遍了 Achradmae 门的所有墓碑。最后，他找到一个小石柱，孤零零立在荆棘灌木丛中，上面刻着内接在圆柱里的球。于是，那位最伟大的叙拉古人的墓，在人们遗忘多年之后重现了。西塞罗让人用镰刀清除了墓地的杂草灌木，下令重修墓地，还原旧观。我们不知道西塞罗的崇敬延续了多久；今天，阿基米德墓已经荡然无存了。

埃拉托色尼和阿波罗尼

埃拉托色尼（Eratosthenes）出生在地中海南岸的昔兰尼



（Cyrene，如今属北非的利比亚），只比阿基米德小几岁。他在雅典生活了多年，40岁时应埃及托勒密三世王的邀请去亚历山大，做王子的老师，也兼任亚历山大博物馆的图书馆长。埃拉托色尼的数学作品大多遗失了，但我们却知道他为寻找小于数 n 的素数的筛法，他为实现倍立方的“平均数计算器”，还有他著名的地球大小的测量。阿基米德的一些发现也写在给他的私人通信中。

阿波罗尼（Apollonius）大约比阿基米德小25岁，公元前262年出生在小亚细亚南部的帕加（Perga）。他年轻时来到亚历山大，住了很长一段时间，跟欧几里得的传人学习。后来，他访问了西小亚细亚的帕加马（Pergamum），那里刚建立了亚历山大模式的学校和图书馆。大约公元前200年，他回到亚历山大，死在那里。尽管阿波罗尼是有名的天文学家，尽管他写了很多数学主题的书，但他把工夫都花在了他不同凡响的《圆锥曲线》（*Conic Sections*），在同辈数学家中赢得了“大几何学家”的名声。

80° 埃拉托色尼丈量地球

关于埃拉托色尼，人们至今还喜闻乐道的也许是他丈量地球的故事。尽管埃拉托色尼的测量带着点儿运气，基本思想却是简洁、独特而科学的，即使只学过最初等的几何和三角的同学，也能理解和欣赏。

埃拉托色尼知道，在夏至日的正午，垂直树立在昔兰尼（埃及尼罗河畔的一个城市）地上的木棍儿没有影子。实际上，在同一个时刻的同一个地方，人们还发现，深井里的水将阳光垂直反射到向井底张望的眼睛。另一方面，在同一天的正午，人们也看到，亚历山大城的高高石柱却投下了影子，说明那里的太阳光线相对于垂直方向有1/50个圆周的倾斜角度。这样，埃拉托

色尼就发现昔兰尼在亚历山大的正南方,距离约5000个古希腊长度单位(stadia)(图10描绘了他的意思)。根据简单比例,我们有

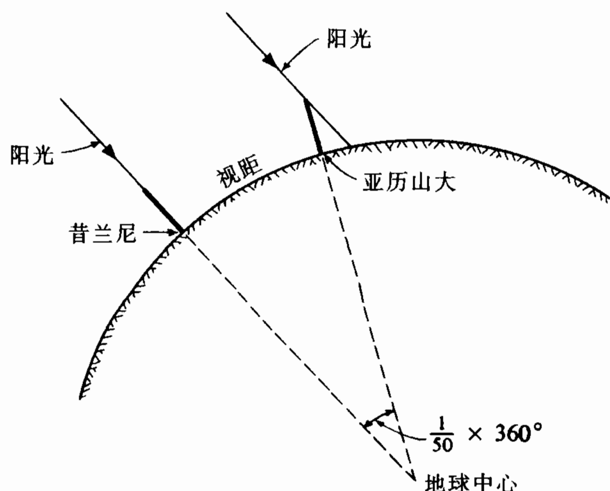


图10 埃拉托色尼的大地测量

地球的周长: 5000 = 1: 1/50

于是,

地球周长 = 250 000 stadia

我们有理由假定一个古希腊长度单位大约等于1/10英里。这就是说,地球的周长近似为25 000英里。[38]

38 即40 000公里,非常接近今天的数据。

有意思的是,地球的大小就这么简单而精确地确定下来了,不用望远镜,也不用跋山涉水或漂洋过海。

81° 埃拉托色尼之死

据说,晚年的埃拉托色尼患了眼炎,几乎什么也看不见,他不愿苟且不能读书的生活,就绝食自杀了。

82° 埃拉托色尼和阿波罗尼的绰号

鲍尔（W. W. Ball）恰如其分地称埃拉托色尼为他那时代的“可敬的克莱顿”（Admirable Crichton），他奇异的天才表现在所有的知识领域。他是著名的数学家、天文学家、地理学家、历史学家、哲学家、诗人和运动员。据说，亚历山大博物馆的学生喜欢叫他 Pentathlus，即五项全能冠军。也有人叫他贝塔（β），这个名字颇有来历。有人认为，因为他知识渊博，所以被尊为柏拉图第二。还有一个不太好的解释，说他尽管多才多艺，却没能在任何一个领域超越他的同辈。换句话说，他总是当老二。这样的解释多少要打些折扣，因为我们还知道，某个天文学家，多半是帕加的阿波罗尼[39]，被称为厄普西隆（ε）。于是，高（James Gaw）提出，也许这些名字只不过代表两个人在博物馆的专用办公室或教室的希腊数字（分别是 2 和 5）。另外，托勒密（Ptolemy Hephaestio）则宣称，阿波罗尼被称为厄普西隆，是因为他研究月亮，而字母 ε 是月亮的象征。当然，帕加的阿波罗尼最恰当的称号是“大几何学家”，是众望所归的荣誉。

39 Apollonius 是很普通的名字，除了这位 Apollonius of Perga，古希腊还有很多同名的学者，如 Apollonius of Rhodes，Apollonius of Tralles，Apollonius of Athenian，Apollonius of Tyana，Apollonius Dyscolus 和 Apollonius of Tyre 等。

83° “椭圆”、“抛物线”和“双曲线”

[下面的文字，蒙《数学教师》杂志的允许，引自伊弗斯（Howard Eves）为“历史记述”专栏写的同名文章，1960 年 4 月号，280 ~ 281 页。]

在帕加的阿波罗尼之前，希腊人就从 3 种旋转锥体（正圆锥）——顶角小于、等于或大于直角——获得了不同的圆锥曲线截面。拿垂直于母线的平面来切割这 3 种锥体，便分别产生椭圆、抛物线和双曲线。不过，双曲线只出现一个分支。而阿波罗

尼在他的杰作《圆锥曲线》第一卷里，就以我们现在熟悉的方式，从一个正或斜的*双锥面*获得了所有圆锥曲线。[40]

“椭圆”、“抛物线”和“双曲线”的名字是阿波罗尼起的，他借用了毕达哥拉斯学派的名词。当年，毕达哥拉斯的弟子们将矩形叠合在线段（也就是把矩形底边放在线段上，底边的一端与线段的一端重合），根据矩形的底边是短于线段、正好与线段重合还是超过线段，分别将那些情形称为“亏”（ellipsis）、“齐”（parabole）和“超”（hyperbole）。现在，我们令 AB 是圆锥曲线的主轴（图 11），P 是曲线上任意的点，Q 是从 P 到 AB 的垂线的垂足。在 A 点（曲线的顶点）作 AB 的垂线，并划分距离 AR 等于我们今天所谓的圆锥曲线的正焦弦（或正焦参数）p

40 希腊前辈们一定也能看出任何一个圆锥都包含着不同的圆锥曲线，他们坚持用垂直于母线的平面来切割，据说是为了处理“逆问题”：证明一条曲线可以从圆锥截取下来。

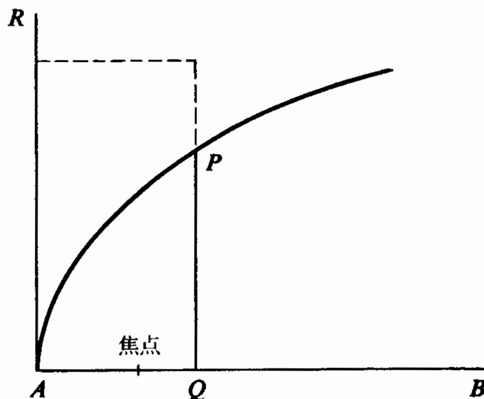


图 11

（即等于通过曲线焦点并与主轴垂直的弦的长度）。将一边长为 AQ、面积为 $(PQ)^2$ 的矩形叠合在 AR。根据叠合的边是短于、等于或大于线段 AR，阿波罗尼称相应的曲线分别为“亏曲线”（*ellipse*）、“齐曲线”（*parabola*）和“超曲线”（*hyperbola*）。换句话说，假如我们在 x 和 y 轴分别沿 AB 和 AR 的笛卡儿坐标系中

考虑圆锥曲线，令 P 点的坐标为 x 和 y，那么，当 $y^2 < px$ 时，曲线是亏的（椭圆），$y^2 = px$ 时，曲线是齐的（抛物线），$y^2 > px$ 时，曲线是超的（双曲线）。实际上，在双曲线和椭圆的情形，

$$y^2 = px \pm px^2/d$$

其中 d 是通过顶点 A 的直径的长。阿波罗尼根据和这些曲线等价的笛卡儿方程导出了曲线的系列几何性质。

我们来看，占据着平面有限部分的封闭曲线的椭圆，与所谓平面的无限远直线没有公共点。另一方面，抛物线与无限远直线相切，有且只有一个公共点；而双曲线与无限远直线相交于两个不同的点。因为三种圆锥曲线与无限远直线的这些关系，形容词"椭圆型的"、"抛物型的"和"双曲型的"也走进了某些数学领域。于是，1871 年，克莱因（Felix Klein）把罗巴切夫斯基（Lobachevsky）和博莱（Bolyai）的非欧几何称为双曲几何，把黎曼几何称为椭圆几何，而把抛物几何的名字留给了欧几里得几何。简单地说，用这三个名词的主要原因是，在罗巴切夫斯基和博莱的非欧几何里，经过一点 P 存在两条不同的直线，平行于不经过 P 点的直线 l；在黎曼的非欧几何里，经过 P 点没有与 l 平行的直线；在欧几里得几何里，经过 P 点只有一条与 l 平行的直线。

因为同样的理由，那三个形容词也出现在射影几何中。在射影几何中，我们特别研究的是由下列形式的对称方程所解析决定的直线到自身的映射：

$$Axx' + B(x + x') + C = 0$$

这里 A、B、C 是实常数，x 和 x' 是映射下对应点的坐标。直线的这种到自身的映射叫对合，对合研究中特别有意思的是那些所谓重点，即映射到自身的点。为寻找对合的重点，我们只需要

令 $x = x'$，得一个二次方程

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

方程的实数解就是对合的重点。二次方程，在 $B^2 - 4AC > 0$ 时，有两个不同的实数解，在 $B^2 - 4AC = 0$ 时，只有一个实数解，在 $B^2 - 4AC < 0$ 时，没有实数解，三种情形相应的对合分别被称为双曲型的、抛物型的和椭圆型的。因此，双曲型的对合有两个重点，抛物型的对合只有惟一一个重点，而椭圆型对合没有重点。

“椭圆型”还出现在下面一些场合：椭圆锥、椭圆柱、椭圆坐标、椭圆函数、椭圆积分、椭圆抛物面、椭圆型偏微分方程、曲面的椭圆点和椭圆型黎曼面。同样，我们也有双曲柱、双曲函数、双曲对数、双曲抛物面、双曲型偏微分方程、曲面的双曲点、双曲螺旋和双曲黎曼面。当然还有抛物柱、抛物绳、曲面的抛物点、抛物螺旋和抛物黎曼面。这些数学名词都可以在数学词典里看到(如 Glenn James and R. C. James, eds. *Mathematics Dictionary*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1959)。在大多数情形，词条都清楚说明了采用这些特别形容词的理由。

丢 番 图

代数史上的巨人、并给后代欧洲数论家产生巨大影响的是亚历山大城的丢番图 (Diophantus)，我们不知道他的生活年代，也不知道他来自哪个民族。多数历史学家根据零星的事实确定他生活在公元 3 世纪。他最重要的作品是《算术》(*Arithmetica*)，一部关于代数数论的书，表现了作者的天才。本书主要讨论不定代数方程问题，也就是寻找方程的有理数解。这种问题已成为所谓的丢番图问题。实际上，现代意义的丢番图问题更严格地限于

整数解。

84° 丢番图生平

关于丢番图的生平，我们只确切地知道他曾活跃在亚历山大城。不过，《希腊诗选》（*Greek Anthology*）中的一个问题，似乎能给我们一点儿细节。《希腊诗选》（或《帕拉廷诗选》（*Palatine Anthology*），大约是语法家梅特罗多勒斯（Metrodorus）在公元500年左右汇集的）[41]中有46个铭文形式的问题。有关丢番图的问题大意是这样说的："丢番图的童年经过了生命的六分之一，青年经过了十二分之一，又做了七分之一的单身汉。结婚五年后生下一个儿子，儿子比父亲先死四年，年纪是他的一半。（问儿子死时丢番图多大年纪？）"

41 《希腊诗选》囊括了公元前7世纪到公元10世纪间的6000多首诗歌、格言、铭文等，是欧洲古代文学宝库。1606年在德国海德堡帕拉廷伯爵的图书馆里发现了它流传下来的惟一稿本。

假如我们把"年纪是他的一半"理解为"年纪是他父亲享年的一半"，那么，令 x 为丢番图去世时的年龄，我们很容易得到方程

$$x/6+x/12+x/7+5+x/2+4=x$$

结果是 $x=84$。于是，丢番图过了14年的童年，7年的青春时光，12年的单身汉，33岁时结婚，5年后，在他38岁时有了一个儿子，80岁时，他42岁的儿子死了。假如我们把"年纪是他的一半"理解为"年纪正好是他父亲当时年纪的一半"，结果就不同了，而且出现了分数年。根据这样的解释，丢番图是在 $65\frac{1}{3}$ 年时死的，而儿子是 $30\frac{2}{3}$ 年时死的。既然丢番图那么喜欢整数，我们还是让他的生命更长久些吧。

85° 代数的缩写

1842年，纳塞尔曼（G. H. F. Nesselmann）将代数记号的

历史演进分为三个阶段。首先是文字的代数，问题的解用语言来描写，就像写散文一样，没有缩写，也没有符号。然后出现缩写的代数，以速记的缩写记号来表示经常出现的数量和运算。最后我们才有了符号的代数，问题的解以符号组成的简略数学表达方式出现，与符号所代表的数量几乎没有明显的关系。我们可以说，丢番图之前的代数是文字的代数。丢番图的一大数学功绩就是缩写了希腊的代数。然而，文字代数仍然在世界的其他地方（印度除外）普遍流行了好几百年。特别在西欧，许多代数直到15世纪都还延续着文字的形式。16世纪，符号代数开始在西欧出现，但到了17世纪中叶才流行。人们恐怕没想到，我们的初等代数教科书里的符号系统还不足300年。

丢番图简化了未知数、未知数的幂（直到6次方）、减、恒等和倒数的表达方式。我们说的“算术”（arithmetic）源自希腊语 *arithmetike*，是“数”（*arithmos*）与“科学”（*techne*）的复合。赫斯（T. L. Heath）令人信服地指出，丢番图的未知数符号也许是合并希腊字“数”的前两个字母 α 和 ρ 而来的。有时候，它看起来像最后一个字母 s。尽管这一点还存在疑问，幂的记号却很清楚。这样，“未知数的平方”记作 Δ^{Y}，是希腊字“幂”（*dunamis*，ΔYNAMIΣ）的前两个字母。同样，“未知数的立方”记作 K^{Y}，是希腊字“立方”（kubos，KYBOΣ）的前两个字母。其他幂也就好说了：$\Delta^{Y}\Delta$

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
D. P. de FERMAT
D. de FERMAT



TOLOSÆ,
BERNARDVS BOSC,
M. DC. LXX.

丢番图的《算术》

（平方的平方），ΔK^Y（平方的立方），K^YK（立方的立方）。丢番图的“减号”很像倒立的 V 带着角的平分线，可以解释为希腊字“缺”（*leipis*，ΛΕΙΨΙΣ）的两个字母 Λ 与 I 的复合。所有的负项都写在一起，前面带减号；“加”通过并列来表达；未知数的幂的系数跟在幂记号的后面，依次用希腊字母表示。如果有常数项，则用希腊字“单位”（monades，ΜΟΝΑΔΕΣ）的缩写$\mathring{M}$配以恰当的系数。于是，

$$x^3 + 13x^2 + 5x \text{ 与 } x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

就应表达为

$$K^Y\alpha\Delta^Y\iota\gamma\zeta\varepsilon \text{ 与 } K^Y\alpha\zeta\eta\Lambda\Delta^Y\varepsilon\,\mathring{M}\alpha$$

可以读做

未知数立方 1，未知数平方 13，未知数 5

和

（未知数立方 1，未知数 8）减（未知数平方 5，单位 1）

文字代数就这样成为缩写代数。

86° 一个丢番图式的问题

数学家德摩根生活在 19 世纪，有人问他哪年出生的，他回答：“在 x^2 那年我 x 岁。”那他生在哪年呢？[42]

42 想想看，哪一个 18 × × 是平方数？关于德摩根，读者也许记得集合论（或形式逻辑）里的一个定律：任意多个集合的交集的补集等于它们补集的并集；任意多个集合的并集的补集等于它们补集的交集。这就是有名的“德摩根律”。

87° 希腊文里的“算术”

古希腊语区别了数的抽象关系的研究与数的计算的技巧，前者是所谓“算术的”（*arithmetic*），而后者是“计算的”（*logistic*）。这种分类一直延续到中世纪，15 世纪末才出现在同一个“算术”的名义下讨论数的理论问题和实践问题。有趣的是，在今天的欧洲大陆，“算术”还保留着古希腊的意义，而在英国和美国，“算术”却跟古代的“计算”同义。在这两个地方，数的

抽象研究是以描述性的名词“数论”来称呼的；“*logistic*”一词指的是符号逻辑，而 *logistics* 指的是军事的后勤部门，负责军事行动中的运输、驻扎和补给等。

希腊时代数学的终结

欧几里得、阿基米德和阿波罗尼的后人曾一度光大了希腊的几何传统，但接着就衰落了，新的发展仅限于天文、三角和代数。后来，到了公元3世纪，在阿波罗尼500年之后，才情洋溢的亚历山大城的帕普斯（Pappus），通过多年的努力，重新点燃了人们对几何的热情。尽管帕普斯写了好多数学评论，他真正伟大的作品却是《数学汇编》（*Mathematical Collection*），是关于他那时代的几何作品的综合评述和阅读指南，还罗列了大量原始命题、命题的改进、推广和历史评注。它是一座真正的几何的矿藏，却也是古希腊几何的一曲天鹅的绝唱，因为在帕普斯之后，希腊数学失去了往昔的活力，而我们也只能在零星的不起眼的评论里看到它们的影子。

88° 几个著名的不等式

自毕达哥拉斯时代起，希腊人就对三种平均数感兴趣，即算术平均数、几何平均数和调和平均数——最后这个名词是阿契塔（Archytas）和希帕索斯（Hippasus）从原来的“负反对”（subcontrary）改过来的[43]。我们可以这样分别定义两个正数 a，b 的三种平均数：

$$A=(a+b)/2,\ G=\sqrt{ab},\ H=2ab/(a+b)$$

硕士在面试的时候，常常被要求证明 $A \geqslant G \geqslant H$，等式只在 a

43 在逻辑学中，如果两个命题可能同时正确但不可能同时错误，就说它们是subcontrary。调和平均是倒数的平均的倒数。古希腊人（特别是毕达哥拉斯派）把它跟音乐联系，而文中那个图形则体现了比例的“调和”。我们还知道，曲面的曲率也是用调和平均来计算的。

$=b$ 时成立。在帕普斯《数学汇编》第三卷里，我们可以看到建立这两个不等式的一种奇妙而简洁的方法。如图 12，在线段 AC

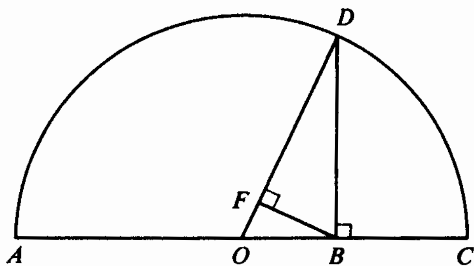


图 12

取点 B，自 B 点引 AC 的垂线，与半圆 AC 交于点 D。假如 F 是 B 到 OD 的垂足（O 是 AC 的中点），我们很容易证明 OD、BD、FD 分别代表了线段 AB 和 BC 的算术平均数、几何平均数和调和平均数。（OD 是算术平均，是显而易见的；BD 是几何平均，也是大家在中学几何里都知道的；FD 是调和平均，是因为在相似三角形 DFB 和 DBO，我们有 $FD/DB = DB/OD$，于是 $FD = (DB)^2/OD = 2(AB)(BC)/(AB+BC)$。）那个不等式就这样从几何上得到了证明。需要证明这两个不等式的硕士同学，最好的策略大概就是抬出帕普斯的论证，这比在纯粹的代数计算中蹒跚，会给人留下更好的印象。

89° 帕普斯对毕达哥拉斯定理的推广

［下面的文字经允许改编自伊弗斯在《数学教师》1958 年 11 月号 544～546 页“历史记述”里的文章。］

每个中学生早晚都会熟悉著名的毕达哥拉斯定理：直角三角形斜边的正方形面积等于两个直角边的正方形面积之和。这个定

理是写于公元前300年的欧几里得《原本》第一卷命题47。

早在欧几里得时代，人们就已经知道了毕达哥拉斯定理的某些推广。例如，《原本》第六卷命题31说：直角三角形斜边上的图形的面积等于两个直角边上的相似图形的面积之和。这个推论不过是将原来直角三角形边上的正方形换成了相似构成的相似图形。更有意义的推论来自第二卷命题12和13。两个推论的综合而现代的表述是：在三角形中，钝（锐）角对边的正方形的平方等于其余二边的平方和加（减）其中一边与另一边的投影的乘积的2倍。用图13的记号，就是$(AB)^2=(BC)^2+(CA)^2\pm2(BC)(DC)$，加减号根据$C$在三角形$ABC$中是钝角或锐角来决定。

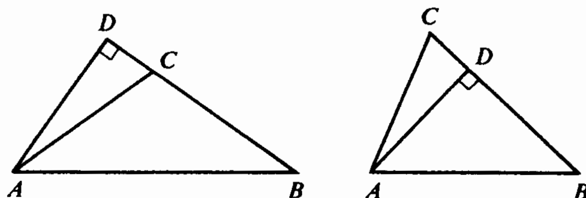
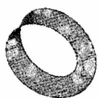


图13

如果用有向线段，我们可以将第二卷命题12、13与第一卷命题47综合为一个陈述：假如在三角形ABC中，AD为BC的高，那么$(AB)^2=(BC)^2+(CA)^2\pm2(BC)(DC)$。因为$DC=CA\cos BCA$，我们看到这个陈述就是所谓的余弦定理。余弦定理其实就是毕达哥拉斯定理的一个绝妙的推广。

然而，古希腊时代对毕达哥拉斯定理的最惊人的推广，也许来自亚历山大的帕普斯的《数学汇编》第四卷的开篇。帕普斯的推广是这样的（图14）：设ABC为任意三角形，而$CADE$和$CBFG$为CA和CB边上的任意平行四边形。令DE和FG交于H，作AL和BM平行并等于HC。那么，平行四边形$ABML$的面积



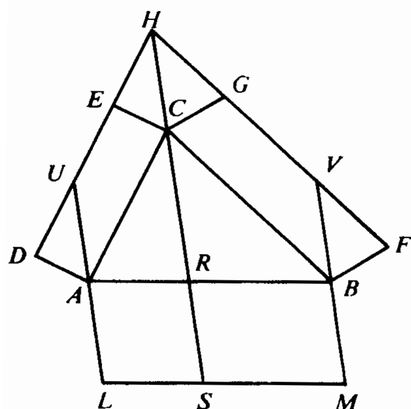


图 14

等于 $CADE$ 与 $CBFG$ 的面积之和。证明很简单。因为我们有 $CADE = CAUH = SLAR$ 和 $CBFG = CBVH = SMBR$，于是，$CADE + CBFG = SLAR + SMBR = ABML$。我们应该注意，毕达哥拉斯定理在两个方向推广：直角三角形被取代为任意三角形，边上的正方形被取代为任意平行四边形。

学几何的中学生大概都会对帕普斯的推广发生兴趣，而推广的证明也是他们很好的练习。也许几何天赋多的同学还愿意靠自己的力量把帕普斯的推广更推进一步（推广到三维空间）：令 $ABCD$ 为任意四面体（图 15），$ABD-EFG$，$BCD-HIJ$，$CAD-KLM$

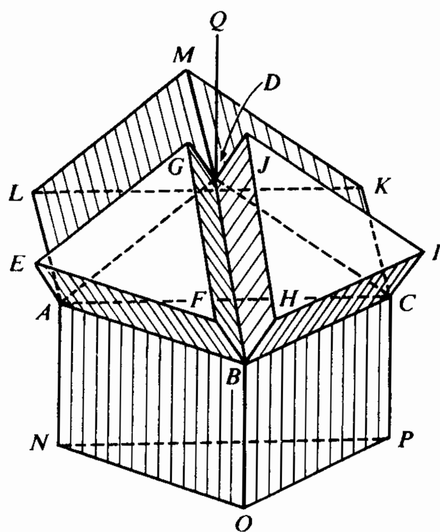


图 15

分别为 ABD，BCD，CAD 三个面上的任意三棱柱。令 Q 为 EFG，

HIJ，KLM 三面的交点，设三棱柱 ABC－NOP 的棱 AN，BO，CP 为矢量 QD 的平移。那么，ABC－NOP 的体积等于 ABD－EFG，BCD－HIJ，CAD－KLM 的体积之和。它的证明和前面帕普斯推广的证明是类似的。

90° 第一个女数学家

在亚历山大博物馆，继帕普斯之后的小作者和评注家中，还有泰奥恩（Theon）和他的女儿海帕蒂娅（Hypatia）。父女俩生活在公元四五世纪之交宗教剧变的多事之秋，也是那个著名学府的最后两个数学家。泰奥恩为托勒密的《天文学大成》（*Almagest*）写过评注，还修订过欧几里得《原本》（我们所有的现代版都是从它派生出来的）。海帕蒂娅当然从父亲那儿继承了数学兴趣，是数学史上第一个女数学家。她在数学、医学和哲学都很出名，据说还为丢番图的《算术》和阿波罗尼的《圆锥曲线》写过评注。


海帕蒂娅

海帕蒂娅是亚历山大城新柏拉图主义的代言人，在博物馆主讲柏拉图的哲学。她最有名的学生是昔兰尼的西内西乌斯（Synesius），后来成为托勒密城（Ptolemais）的主教。从他写给海帕蒂娅的情书可以看到，精神的基督教与异教的哲学有着多么亲密而实在的往来。另一方面，海帕蒂娅之死却说明好战的基督教对异教的哲学是多么恶毒和残忍。公元 415 年 3 月，她被一群愤怒的基督教暴徒抓走了，残暴地把她处死在异教徒寺庙的台阶上。

海帕蒂娅的悲剧拉下了希腊数学大戏的帏幕；长远而辉煌的希腊数学的历史走到了尽头。



第二象限

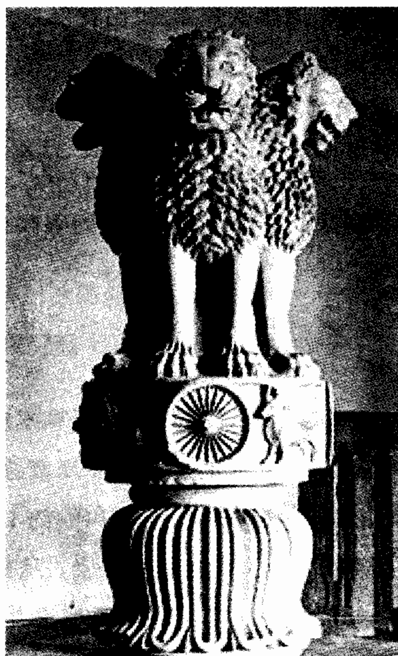
从阿育王的石柱到费马的笔记

印度的数学

从罗马帝国衰落的5世纪中叶到11世纪，是著名的“欧洲的黑暗年代”，因为在这段时期里，西方欧洲的文明跌落到了低谷。无情的暴力和火热的宗教信仰，是那个年代的基本特征。学校教育几乎不复存在，古希腊留下的知识也濒临消失。在那个时期，数学的历史连同其他学科的历史，似乎往印度和阿拉伯世界绕了一个大弯，几百年之后才重新回到欧洲。

91° 阿育王

数学史上不时会出现那样一个人物，他肯定不是数学家，却在数学扮演重要的角色。阿育王（大约公元前274～前232年间的印度皇帝）就是这样一个人。他跟数学史的关系在于他那些至今还树立在印度每个重要城市的雄伟石柱，更在于那些石柱铭刻的一些最古老的数字符号，也是流传到今天的现代数字符号。



贝拿勒斯城外鹿野苑的阿育王石柱

92° 反演

印度人是天才的算术家，对代数有着重要贡献。他们用反演法解决了许多算术问题，也就是通过一点已知的信息逆向地求出问题的答案。例如6世纪时老阿利耶波多（Aryabhata）提出的一个问题："一个妙目顾盼的美少女问我，你既知反演妙法，那我问你，什么数乘以3，再加乘积的3/4，再除以7，再减商的1/3，再自乘，再减52，再开方，再加8，再除以10，结果等于2？"根据反演法，我们从数2开始逆向计算。于是，$((2)(10)-8)^2+52=196$，$\sqrt{196}=14$，$(14)(3/2)(7)(4/7)/3=28$，即答案。可以看到，问题要除以10，我们就乘以10，问题要加8，我们就减8，问题要开方，我们就乘方，等等。正是因为用相反的运算来取代原来的运算，所以有了"反演"的名称。其实，用现代方法来解，我们也是这样做的：

$$(\sqrt{((2/3)(7/4)(3x)/7)^2-52}+8)/10=2$$

为了解这个方程，我们两边同乘以10，然后减去8，然后平方，等等。

93° 3率法则

3率法则和许多其他初等算术的法则一样，似乎也源自印度，而它的名称也是从婆罗摩笈多（Brahmagupta，约628年）和巴什迦罗（Bhaskara，1114～约1185）叫开来的。几百年来，法则赢得了商人们的十分推崇。从机械说，法则没有什么理由，它与比例的关系要等到14世纪末叶才为人所认识。婆罗摩笈多是这样陈述法则的：在3率法则中，3个项分别叫所有率（*argu-*

ment)、所求率 (*fruit*) 和所有数 (*requisition*), 所有率与所有数必须是同类的。用所有数乘以所求率, 然后除以所有率, 就是答案。为了明白他的意思, 我们考虑巴什迦罗的问题: 假如两钵半藏红花卖七分之三尼 (niska), 那多少藏红花卖九尼? 这里的3/7和9同为货币, 是所有率和所有数, 5/2是所求率。答案是(9)(5/2)/(3/7) = 105/2。我们现在则把这问题作为比例的简单应用:

$$x:9=5/2:3/7$$

早期欧洲的算术作者们花了很多工夫来研究3率法则。从打油诗和经常用来解释它的草图, 我们可以看到法则的机械本性。

94° 印度的代数缩写

印度人缩写了他们的代数。和丢番图一样, 他们常用并列来表示加, 在被减数上加一点表示减; 在因子后用 *bha*(乘积 *bhavita* 的第一个音节) 表示乘; 将除数写在被除数下; 在数前写 *ka* (来自 *karana*, "无理数") 表示平方根。婆罗摩笈多用 *yā* (来自 *yāvattāvat*, "那么多") 来表示未知数。未知的整数前加 *rū*(来自 *rūpa*, "绝对数")。其他未知量用不同颜色的词的第一个音节来表示。于是, 第二个未知数可以记做 *kā*(来自 *kālaka*, "黑色"), 而 $8xy+\sqrt{10}-7$ 应该写成

$$ya\ ka\ 8\ bha\ ka10\ ru\ \dot{7}$$

95° 巴什迦罗的女儿

印度数学家和天文学家巴什迦罗活跃在1150年前后。他流传到今天的作品是一本题为《丽拉沃蒂》(*Lilavati*,"漂亮"的意思)

的算术书。关于这本书，还有一个凄婉的故事。故事说，星相向巴什迦罗预言厄运就会降临，除非他惟一的女儿丽拉沃蒂能在一个黄道吉日的特定时刻出嫁。那天，焦急的新娘紧盯着滴漏不断下沉的水面，竟没留意一粒珍珠从她的头饰无声落下，滚落在滴漏的出口，堵住了水流。吉时已过，人们才发现那颗珠子，可惜太晚了。悲伤欲绝的姑娘只好孤独一生。为了安慰不幸的女儿，巴什迦罗就把她的名字作为书的名字。

96° 看哪！

中学生学几何时都见过巴什迦罗用分割的方法来证明毕达哥

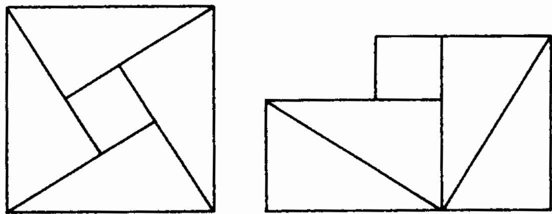


图 16

拉斯定理。像图 16 那样，将斜边的正方形分割为四个全等的三角形加上一个边长为两直角边之差的小正方形。这些分割的图形很容易重新组装成两个直角边的正方形之和。巴什迦罗画了图，但没做进一步的解释，只说"看哪！"当然，一点儿代数计算就能说明。令 c 为斜边，a 和 b 为直角边，那么

$$c^2 = 4(ab/2) + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

"看"毕达哥拉斯定理的证明，也许最好是动态的电影画面。像图 17 那样，斜边的正方形连续变换成为两个直角边的正方形。

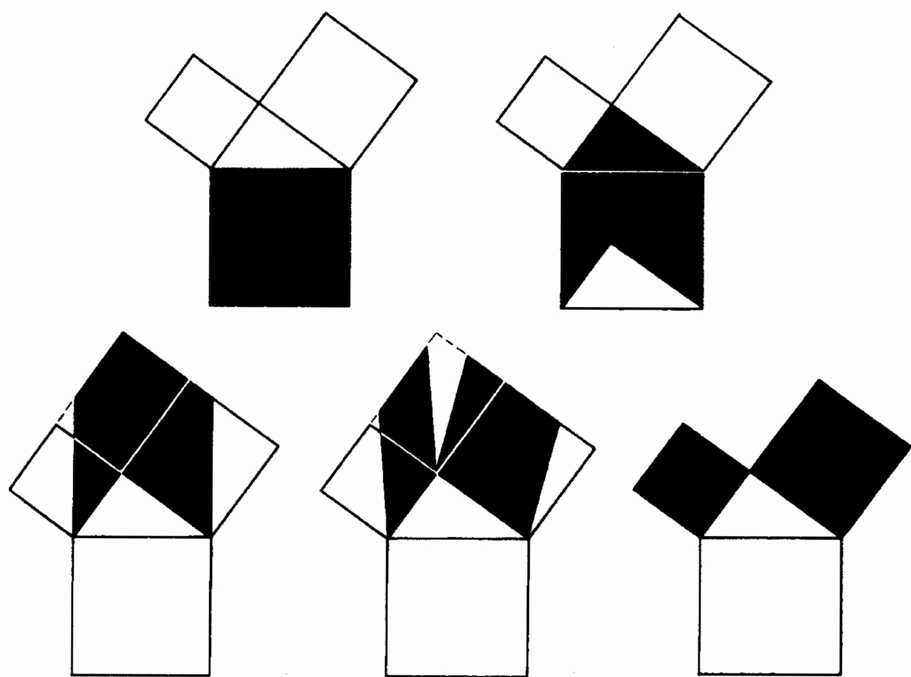


图 17

97° 印度人的诗化数学

印度人喜欢给数学问题披上诗歌的外衣。这部分是因为学生的课文为了方便记忆都写成诗歌的形式，而更重要的是，这些问题被经常拿来做猜谜游戏。我们来看两个例子。一个来自巴什迦罗（约 1150 年），一个来自马哈维拉（Mahavira）。

一群嗡嗡的蜜蜂，一半的方根落在茉莉花丛，8/9 落在身后；还有一只雌蜂，徘徊在雄蜂的身旁，他昨夜醉卧在荷花的芬芳。迷人的姑娘，告诉我蜜蜂的数量。

明媚清新的森林，花果压弯了树枝，蒲桃、莱檬、大蕉、槟榔、菠萝蜜、海枣、扇椰子、芒果——四季鸟语，百啭千声，杜鹃、鹦鹉争春，蜜蜂沉醉花丛——一群疲惫的游客来到丛林。他们采下63堆香蕉，每堆数量一样，又添加7只相同的水果，恰好均分给23个游客，不少也不多。请你告诉我，一堆香蕉有几个？

婆罗摩笈多在谈这些题目时说："这些问题是纯为娱乐提出的，聪明人可以找出千百个问题，也可以根据这里给出的法则解决别人的问题。犹如太阳的光芒令群星黯然失色，有知识的人，能提出问题、特别能解决问题的人，也将卓尔不群，压倒众人。"

有趣的是印度人早年用过的"位置符号系统"，即数字通过联想的事物来表示。例如，数字1可能牵连着月亮、梵天（Braham）、造物主或仪式；而4可能是《吠陀》（因为此书分为4卷）或海洋。我们来看一个例子，它来自5世纪初无名氏的一本天文学著作《太阳系》（*Surya Siddhanta*）。数1 577 917 828从右向左表示为婆苏（Vasu，8个神的统称[1]），2，8，山（7个山系），仪式，数字（9个数字），7，山，半月（15天）。这样一来，同一个数就可能用许多不同的方法来表示，从而大大激发了描写算术法则和科学常数的诗歌，让那些法则和常数更好流传。

1 8婆苏是人格化的自然，在后来的《毗湿奴往世书》（*Visnupurana*），它们分别代表水、极星、月亮、大地、风、火、朝霞和光。不同文献说法不尽相同。

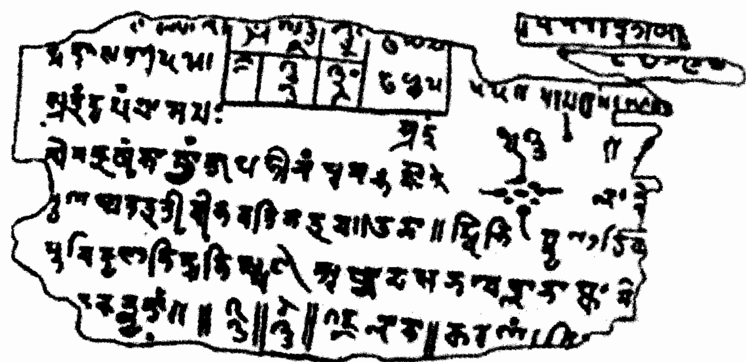
98° 佛的考试

印度人很早就表现了精妙的计算大数的技巧。传说，公元前6世纪的宗教领袖释迦牟尼佛年轻的时候，为了赢得与爱人牵手，曾经历过一场考试。问题是，多少颗微粒并排起来，才能排

满1“里”长的直线？佛祖发现，7颗微粒形成一粒极小的尘埃，7粒极小的尘埃形成小尘埃，7粒小尘埃形成清风扬起的尘埃，如此一步步下去，就能达到“一里”长。这些因子的乘积是一个15位的大数。

99° 巴克沙里手稿的试位法

1881年在印度西北的巴克沙里出土了一卷无名氏的算术书《巴克沙里手稿》（*Bakshali Manuscript*）。手稿由70张白桦皮组成，其来源和时代还在猜想中，估计时间从公元3世纪到12世纪。手稿的一些问题是通过单位还原的方法（一种试位法）解决的。例如，B 是 A 的2倍，C 是 B 的3倍，D 是 C 的4倍，它们的总和为132，那么 A 是多少？假定未知数为1，则 A 为1，B 为2，C 为6，D 为24，其和为33。拿33除132，商为4，即 A 的值。



巴克沙里手稿

100° 希腊与印度数学的对比

希腊数学与印度数学之间存在许多差别。首先，做数学的印度人认为自己是天文学家，所以印度数学在很大程度上还是天文

学的“侄女”；而在希腊人看来，数学是独立存在的，他们是为了数学而研究数学。其次，由于等级制度，数学在印度几乎完全把持在牧师的手中；在希腊，数学向任何感兴趣的人开放。第三，印度人是天才的计算专家，却是平庸的几何学家；希腊人精于几何，却几乎对计算漠不关心。印度的三角学虽然颇有建树，但本质还是算术的；希腊的三角学则刻着几何的烙印。印度人喜欢写诗，把数学裹在晦涩而神秘的语言里；希腊人则追求数学的清晰和逻辑；印度数学主要是经验性的，很少有推导和证明；希腊数学的一个显著特点则在于它一贯严格的例证；印度数学良莠不齐，好数学总是伴随着不好的数学；希腊人似乎有着天生的鉴别好坏的才能，能去伪存真。

希腊数学与印度数学的对比，还保留在我们今天众多不同的基础代数和几何的课本中。我们将几何归功于希腊，而把代数归功于印度。直到最近宣扬“新数学”，我们的代数课本才开始有了基础几何课本惯有的严密、逻辑和材料的选择性。[2]

2 “新数学”是美国在20世纪60年代前后兴起的初等数学教育改革。后面有不少它引出的故事。

101° 拉马努扬

印度最令人瞩目的现代数学家也许算拉马努扬（Srinivasa Ramanujian），一个贫困潦倒的小职员，没进过正规学校，却是天才的数学家。他有着惊人的天赋，能迅捷地洞察复杂的数字关系。1913 年，著名英国数论家哈代（G. H. Hardy，1877 ~ 1947）“发现”了他，想办法将他带到英国，进了剑桥大学。结果两人展开了影响深远的数学合作。

关于拉马努扬的奇异本领，有一个常被人提起的故事。拉马努扬病了，哈代去普特尼的医院看他。哈代去医院的出租车的牌号是 1729，一个看似无聊的数字。哈代记下了车号，好奇地问

拉马努扬，它有什么有趣的地方吗？拉马努扬毫不迟疑，告诉他，当然有趣了，它是能以两种方式表达为两个整数的立方和的最小正整数：$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$。

拉马努扬有着先辈们所表现的超人的数字本领，他的作品也像先辈的一样零乱，有强烈的直觉，却忽略了严格的推导。拉马努扬几乎可以说是20世纪的巴什迦罗。我们可以在拉马努扬的作品里看到许多印度数学与希腊数学的差别。当然，这主要是因为拉马努扬是通过没有系统的自学成长起来的。

阿拉伯数学

阿拉伯人以什么方式把握希腊和印度的知识，对世界文化的保存有着举足轻重的意义。巴格达的许多哈里发[3]，不仅统治有方，还弘扬知识，广招名士。印度和希腊的众多天文学、医学和数学著作，都被殷勤地翻译成阿拉伯文流传下来，后来欧洲人才可能把它们重新译成拉丁文和其他文字。没有阿拉伯学者的工作，希腊和印度的科学一定早已消失在漫长的黑暗年代里了。

3 哈里发的意思是真主使者的继承者，是阿拉伯帝国宗教与世俗的最高统治者的称号。现在只有宗教意义，不再干预世俗政治了。

102° 天文学中的阿拉伯名字

今天的好多名词都可以追溯到阿拉伯时代。任何对观测天文学感兴趣的人，大概都知道，众多的星名，特别那些暗星的名字，都源自阿拉伯。其中有我们最熟悉的亮星如毕宿五（金牛座α，Aldebaran）、织女（天琴座α，Vega）和参宿七（猎户座β，Rigel），暗星如大陵五（英仙座β，Algol）、开阳（大熊座ζ，Mizar）和辅（开阳伴星，Alcor）。许多星名最初都说明星体在星座中的位置。从托勒密的星表翻译成阿拉伯文之后，这些描述

性的名称就退化为一个独立的名词。所以，我们有参宿四（猎户座 α，Betelgeuse，猎人的腋窝[4]），北落师门（南鱼座 α，Fomalhaut，鲸鱼嘴），天津四（天鹅座 α，Deneb，鸟尾），参宿七（Rigel，猎人的左脚），等等。

4 Betelgeuse 是一个误会，阿拉伯文原来指的是“双子座的手”；另外一个误会是，尽管它是猎户座 α，却不如猎户座 β 亮。



权威的希腊天文学著作是亚历山大的托勒密在公元 150 年前后写成的，这部影响深远的著作，所谓的《数学汇编》（*Syntaxis mathematica*），继承了喜帕恰斯（Hipparchus）的作品，简洁而优美。为了与那些次要的天文学著作区别开来，后来的评注者给它冠以一个崇高的字眼 *magiste*，即“最伟大的”。再后来，阿拉伯译者又在前面加上阿拉伯冠词 *al*，从此这部巨著就以《天文学大成》（*Almagest*）扬名天下了。

103° “代数”的来历

我们所谓“代数”一词，来历非常有意思，来自阿尔花拉子默（al-Khôwarizmi）大约在公元 825 年的一篇论文题目：*Hisâb al-jabr Ẇal-muqâbalah*，逐字翻译过来是“再合并与对立的科学”，更自然的说法是，“还原与消去的科学”。文章（至今还在）通过拉丁译本在欧洲流传，而 *al-jabr* 或 *algebra*（代数）也成为关于方程的科学的同义词。当然，19 世纪中叶以来，“代数”已经有了更多的内容。

非数学意义的阿拉伯词 *al-jabr*，是通过西班牙的摩尔人在欧洲流行的。那里的 *algebrista* 是接骨师（把断骨接起来），而那时的理发师也称自己是 *algebrista*，因为接骨师和放血师不过是中世纪理发师的副业。

104° “算法”的来历

除了代数的论文，阿尔花拉子默还写过一本关于印度数字的

书，这部作品也为数学带来了一个新词。书的原本已经不在了，不过在 1857 年发现了它的拉丁译本，开篇说，“阿尔戈里米（Algoritmi）说过……”这里，al-Khowarizmi 变成了 Algoritmi，而我们现在的“算法”（“algorism”或“algorithm”）一词也就从它衍生出来，意思是以任何方式进行计算的技巧。

105°“零”的来历

“零”也许来自阿拉伯文 *sifr* 的拉丁化形式 *zephirum*，而 *sifr* 又是从印度的 *sunya* 翻译过来的，意思是“空虚”或“空”。13 世纪，阿拉伯的 *sifr* 被奈莫拉里乌斯（Nemorarius）引进德国，写成 *cifra*，我们从它派生出现在的 *cipher*（“零”）。

106°“正弦”的来历

现在的三角函数，除了正弦（sine）以外，显然都来自各函数在单位圆的圆心角的几何解释。于是，如图 18，假如圆半径为 1 个单位，则 $\tan\theta$ 和 $\sec\theta$ 就是切线段 *CD* 和割线段 *OD* 的长度。而余切不过是余角的正切。正切、余切、正割和余割等函数曾有过别的名称，现在的名字 16 世纪末才出现。

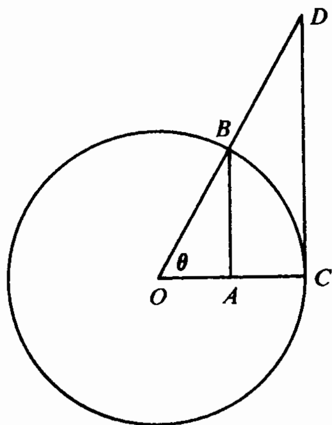


图 18

正弦的来历有些古怪。阿耶波多（Āryabhata）称它为 *ardhā – jyā*（“半弦”）和 *jyā – ardhā*（“弦的一半”），后来，这个词被缩写为 *jyā*（“弦”）。阿拉伯人根据发音，从 *jyā* 派生出 *jiba*，而根据阿拉伯人爱省略元音的

习惯，它又简化为*jb*。在如今的阿拉伯语中，*jiba* 一词除了专业意义以外已经没有什么意思了。后来的作者把 *jb* 当作那个毫无意义的词 *jiba* 的缩写，就把它用 *jaib* 来代替，它有相同的字母，而且是一个不错的阿拉伯词，意思是“峡谷”、“海湾”。再后来，约 1150 年，克雷莫那的格拉多（Gherardo）从阿拉伯文翻译时，将 *jaib* 换成了同义的拉丁词 *sinus*（“穴”、“湾”），才有了我们现在的 *sine*。

107° 阿尔哈森发疯

阿尔哈森（al-Haytham，今天更通行的写法是 Alhazen，约 965 ~ 1039）的名字在数学界的流传，是因为所谓的“阿尔哈森问题”：从一个圆平面内的两个定点画两条线，相交于圆上一点，并在那点产生两个相等的角。问题引出二次方程，希腊人曾通过相交的双曲线和圆来解；它和三分角一样，也超出了欧几里得几何的能力。[5] 阿尔哈森出生在伊拉克南部的巴什拉，也许是最伟大的穆斯林物理学家。上面的问题出现在他的《光学》，一篇对欧洲发生过重大影响的著作。[6]

5 问题引出一个双二次方程，涉及三次方根，因而和倍立方问题一样不能用直尺和圆规来解。

6 它与光学有关，因为它是另一种形式的反射问题：从圆内的一点打出一只台球，在圆周反射回来，击中另一只球。所以，它也叫“阿尔哈森台球问题”。其实，托勒密早在公元 150 年就提出这个问题了。

不幸的是，阿尔哈森曾鼓吹能造一台可以控制和调节尼罗河洪水的机器。于是，他被哈里发哈金招来埃及，要他解释并最好证明他的想法。阿尔哈森明白自己的东西几乎不可能实现，又怕哈里发怪罪，就只好装疯，在那个年代，人们是特别爱护疯子的。阿尔哈森小心翼翼，一直疯到 1021 年哈里发死了。

108° 三个同学

对阿拉伯代数最深刻、最有创造性的贡献，也许是欧玛尔·海亚姆（Omar Khayyam，约 1044 ~ 约 1123）用几何方法解三次

方程。海亚姆出生在波斯的霍拉桑（Khorsan），在西方世界，人们通过菲兹杰拉德（Edward Fitzgerald）知道他是优美的《鲁拜集》（*Rubaiyat*）的作者。海亚姆的名声，还因为他的历法改革和他对欧几里得《原本》的评论。他的几何批评，开了萨谢利（Saccheri）思想的先河，最终引出了第一个非欧几何。



《鲁拜集》插图

至今还流传着关于海亚姆和他的两个同学的一个发人深省的故事。当年，尼赞慕尔穆克（Nizam ul Mulk）、哈桑本萨巴（Hasan Ben Sabbah）和海亚姆同在霍拉桑最伟大的智者、纳霞堡（Naishapur）的慕瓦法克（Mowaffak）阿訇门下做学生。三个年轻人，三个杰出的学者，成了亲密的朋友。那时人们相信，作为阿訇的学生，该是好运当头的。于是一天，哈桑向两个朋友提议，他们应该立誓，将来不管谁发达了，都要有福同享，不能只图自己安逸。多年过去了，尼赞交了好运，成为阿尔斯兰苏丹（Sultan Alp Arslan）的维齐尔（伊斯兰国家的大臣）。同学立刻来找他，要他践行学校的誓言，让大家分享他的荣华。

哈桑想当官，做朋友的维齐尔把他举荐给苏丹，苏丹答应了。不过，自私的哈桑并不领情，还千方百计排挤他的朋友，最终还是失宠了。落得被放逐的下场。欧玛尔不求名利，只希望能生活在朋友的好运当中，传播科学和数学，保佑朋友富贵长久。维齐尔有感于老同学的谦恭和真诚，每年给他一笔养老金。

命运多舛的哈桑，后来成为一个狂热组织的首领，1090年占领了里海以南山区的阿拉穆特城堡。哈桑和他的队伍以城堡为据点，抢掠过往的商旅，恐怖的乌云笼罩着穆罕默德世界。哈桑成了“山地老人”，据说我们今天“谋杀”（assassin）一词就来自他的名字（*Hassan*），或者来自他们杀人时用来麻醉自己的大麻（*hashish*）。在无数被杀害的人中，就有哈桑的老同学和朋友尼

赞慕尔穆克。

与哈桑的暴烈和破坏截然相反的，是欧玛尔的沉静和创造。他平静地生活，为当时的文学和科学做出了令人难忘的贡献。

就这样，三个同学，一个成长为治国良臣和仁者，一个堕落成可悲的叛逆者和杀人狂，一个是虔诚的学者和创造者。三个人的命运也多少反映了大千世界。但愿我们的善良能远远超过邪恶！

109° 欧玛尔的玫瑰

大约在 1123 年，海亚姆死在纳霞堡。撒玛尔罕一个叫尼扎米（Khwajah Nizami）的学生讲过一个故事：他经常跟老师欧玛尔在花园对话，有一次，老师说他的坟墓应该在一个能有北风吹落玫瑰花瓣儿的地方。几年后，老师死了，学生过访纳霞堡，就在那儿给老师寻了墓地，恰好在一个花园外。伸出院墙的果树枝落下无数花果，把墓完全遮蔽了。

1883 年，菲兹杰拉德——多情的爱尔兰诗人，使欧玛尔英名不朽的翻译家——去世了，被埋在萨福克郡博尔奇（Boulge）的一个小教堂。1884 年，《伦敦新闻画刊》的旅游艺术家辛普森（William Simpson）访问纳霞堡，找到了尚未完全被人遗忘的欧玛尔墓。他在墓前的平台周围，看到几株玫瑰，他从枝头摘下几颗蔷薇果。他把这些种子带回英国，给了皇家植物园（“丘园”）的贝克（Baker）。贝克先生把它们种下，成功长出几株玫瑰。1893 年 10 月 7 日，他们把其中的一株移栽到了菲兹杰拉德的墓旁。

看我们身旁盛开的玫瑰——“看，”
她说，“我笑着来到世间，

丝穗顷刻从我的香囊断裂，

锦绣珠宝就洒落在花园。"

数学重回欧洲

10 世纪末，希腊的科学和数学经典开始渗入西欧。在接下来的一个时期里，保存在穆斯林文化中的古代知识，通过游学穆斯林文化中心的基督学者们的拉丁文译本，通过西西里诺曼帝国与东方的交流，通过西欧与地中海地区的经贸往来，也在西欧四处传播。

110° 热尔贝，教皇西尔维斯特二世

从罗马帝国在5世纪中叶的衰落直到11世纪，是欧洲的黑暗年代，西欧文明堕落到了低谷。学校教育消失了，希腊文化丧失殆尽，古老的艺术和工艺被遗忘了。只有基督僧侣和少数文化信徒还勉强维持着几丝与希腊和拉丁文化的牵连。无情的暴力，火热的宗教信仰，是那个年代的基本特征。旧秩序崩溃了，社会成为封建的宗教社会。

罗马人从不来喜欢抽象数学，只热衷于数学中的那些与商务和工程相关的东西。随着帝国的衰落，东西贸易的断绝，工程项目的废弃，连那些兴趣也淡漠了。可以毫不夸张地说，在黑暗笼罩下的那500年，除了基督历法的兴起，西方数学没有丝毫的进步。

在黑暗年代的数学历史中举足轻重的角色，最有名的要数法国学者热尔贝(Gerbert)，后来成为罗马教皇西尔维斯特二世(Pope Sylvester II)。

热尔贝大约950年生于法国奥维内（Auvergne），小时候就表现出非凡的才能。他是最早在西班牙的穆斯林学校学习的基督徒之一，而且有证据表明他把印度－阿拉伯数字（没有零）带回了基督教的欧洲。他动手能力很强，做过算盘、地球、天球和钟表，也许还有风琴。这些东西更令当时的某些人怀疑他的灵魂在与邪恶打交道，于是他身边流言四起，仿佛后来的浮士德。传说有尊雕像曾预言热尔贝将死在耶路撒冷——预言应验了（多少有点儿像英国的亨利四世），他死在罗马的耶路撒冷教堂。尽管流言不少，热尔贝在教会的地位却不断上升，终于在999年成为罗马教皇。因为成功领导教会度过了不祥的1000年，他成为第一个所谓的魔法教皇。热尔贝死于1003年。

111° 翻译家的世纪

1085年，摩尔人的托莱多（Toledo）落在了基督徒的手里，接着，大量基督学者涌向托莱多，获取穆斯林的学问。他们还渗透到了西班牙的其他摩尔人中心。于是，在数学史上，12世纪成为翻译家的世纪。最早投身这项事业的是巴斯（Bath）的英国僧侣阿德拉德（Adelard，约1120年），他在西班牙学习和研究，还远游希腊、叙利亚和埃及。他的功绩是用拉丁文翻译了欧几里得的《原本》和阿尔花拉子默天文学表。阿德拉德的经历惊险万分；为了获取阿拉伯人那些戒备森严的学问，他曾假冒穆罕默德的学生。另一个先驱者是来自意大利提沃利的普拉托（Plato，约1120），他翻译了阿尔巴塔尼（al-Battani）的天文学，狄奥多西（Teodosius）的球面几何，以及其他一些作品。那个时代最勤勉的译者是克雷莫那的格拉多，把90多部阿拉伯作品译成拉丁文。其中包括托勒密的《大成》、欧几里得的《原本》和阿尔花拉子默的

《代数》。我们在前面（故事 106）还讲过，正弦（sine）一词就是通过格拉多的翻译而流传下来的。12 世纪的其他翻译家还有塞维利亚的约翰（John）和切斯特的罗伯特（Robert）。

112° 西西里的诺曼王国

西西里岛因为特殊的位置和政治历史，自然成为东西交会之所。它起初是希腊殖民地，然后是罗马帝国一隅，帝国衰落后，它跟君士坦丁堡联合，9 世纪时又被阿拉伯占领了 50 年，后来重回希腊，被诺曼人统治。在诺曼统治时期，希腊文、阿拉伯文和拉丁文共同流行，外交官们频繁往来君士坦丁堡和巴格达。许多希腊文和阿拉伯文的科学和数学手稿落在了诺曼人的手里，被译成拉丁文。激励这项伟业的，是两个统治者、同时也是科学的宣扬者：腓特烈二世（Frederick II，1194～1250）和他的儿子曼弗雷德（Manfred，约 1231～1266）。

113° 意大利的商业中心

在最初与阿拉伯世界建立贸易往来的城市中，就有意大利的几个商业中心，如热那亚、比萨、威尼斯、米兰和佛罗伦萨。意大利的商人走进了东方文明，带回了有用的算术和代数知识。他们为传播印度－阿拉伯数字体系发挥了重要作用。

114° 从兔子到向日葵

13 世纪初，也许是中世纪最天才数学家的列奥纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，“列奥纳多，波那乔（Bonaccio）之子”）诞生了。斐波那契，也叫“比萨的列奥纳多”或“比萨人列奥纳多”，出生在商业中心比萨，父亲在那儿经商。那时候，

意大利的许多大商行都在地中海沿岸各地建立了仓库。于是，小列奥纳多是随做海关官员的父亲在非洲的北海岸长大的。父亲的职业从小激发了小孩儿的算术热情，后来，他又远游埃及、西西里、希腊和叙利亚，走近了东方和阿拉伯的数学实践。斐波那契被印度－阿拉伯的先进计算方法彻底征服了，于是，在1202年，他刚回家不久，就发表了著名的《算书》（*Liber abaci*）。

我们看到的《算书》是1228年出版的第二版。书的主要内容是算术和初等代数，尽管基本上是他的独立考察，但也表现了阿尔花拉子默和阿布卡米尔（Abû Kâmil）的影响。本书全面论述并热情宣扬了印度－阿拉伯符号，大大促进了在欧洲引进那些数字。

《算书》还汇集了大量数学问题，几百年里一直是后来作者的资源。在前面的故事里（13），我们已经提到过其中一个有趣的问题，它显然是从更早的兰德纸草卷的问题演化来的。而书中影响最大的也许是下面的问题："假如每对兔子每月生产一对小兔子，而小兔子在一个月后又能生产小兔子，那么一对兔子一年能养出多少对兔子？"不必费多少脑筋，读者就能发现，问题引出下面的有趣数列（数字代表相继月份的兔子对数）：

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots, x, y, x+y, \cdots$$

数列的前两项是1，接下来的每一项是它前面两项之和，这个数列就是著名的斐波那契数列，它会在许许多多意想不到的地方冒出来。在拼图游戏、艺术和植物的叶序中有它的影子，在不同的数学领域也有它惊人的表现。

我们来看向日葵的例子。我们看到，向日葵的种子聚集在一个个螺旋线包围的钻石形小区域里，螺旋线从中心出发，向四周发射（图19）。奇怪的是，假如我们来数数有多少顺时针的螺旋



图 19 向日葵的斐波那契螺旋

线，又有多少反时针的螺旋线，会发现两样曲线的数目正是斐波那契数列里相继的两项。其实，任何复合花的种子排列方式都是这样的（例如雏菊和紫苑，也都有放射状的花头）。不过向日葵更容易看出来，因为它的花头大，种子也大。更令人惊奇的是，上面说的螺旋线竟然是对数螺线。

再来看沿植物的茎向外生长的叶片（或芽或树枝的分岔）。让我们从茎根附近的叶片看起，沿着茎往上数，数到第一片叶子的正上方的那片为止，数目通常也是斐波那契数列里的一个。而且，如果我们数数那些叶片绕茎旋转了几圈儿，那数一般是斐波那契数列的前几项。[7] 许多植物形态都有类似现象，如莴苣的叶片、洋葱的皮、松果的螺旋鳞片。

假如我们拿斐波那契数列的相邻两项之比来构造序列，我们得到

7 更具体地说，旋转的周数（“叶序周”）与叶片数之比，就形成下面的那个比例数列，即植物的“叶序”。

1/1，1/2，2/3，3/5，5/8，8/13，…

可以从理论上证明，这个比的数列趋近于下面的极限：

$$r=(\sqrt{5}-1)/2$$

这就是有名的黄金比例，让希腊人发生了几千年的兴趣。希腊人认为，如果一点 B 将线段 AC 分割为 $AB/BC=BC/AC$，那就是黄金分割。可以证明，在这种情形，两个比值 AB/BC 和 BC/AC 都等于 r。看来，大自然似乎在朝着黄金比例趋近。

心理学实验证明，最令人赏心悦目的矩形是那些长宽比例等于黄金比的矩形。这些或许可以称做黄金矩形的几何对象，在所谓“动态对称”的艺术技巧中起着根本性的作用，汉姆比奇（Jay Hambidge）等人对它有过深入的研究。黄金比和黄金矩形，出现在希腊建筑和希腊陶器，应用于雕塑、绘画、建筑设计、家具设计和标本陈列。许多艺术家，像著名的美国画家贝娄（George Belows）等，就在其作品中广泛运用了动态对称的原理。

斐波那契数列还在不同的数学研究领域得到了意想不到的应用。例如，为了寻找两个正整数的最大公因子，我们需要进行所谓的“欧几里得算法”，经过一定数目的除法步骤。[8] 相对于两个正整数来说，除法的步数是很小的，但我们自然想知道，是否可能为那步数预先确定一个极限。答案就是拉梅（Gabriel Lame）发现的定理：确定两个给定正整数的最大公因子所需要的步数，不超过较小那个数的位数的5倍。定理的证明，首先就利用了斐波那契数列的一些性质！

8 也就是我们在小学学过的“辗转相除法”。

关于斐波那契数列和它的性质，文献难以计数，而且还在增加。有趣的关系也许像三角形的几何一样，是层出不穷的。实际上，1963年，就有一群斐波那契数列迷们，在小霍加特（Verner Hoggatt，Jr.）医生的倡导下，建立了斐波那契学会，开始出版

杂志《斐波那契季刊》，专门研究那个数列。杂志的前三年发表了这个特殊研究领域的近 1000 页的成果。1968 年，为了补偿大量积压的稿件，杂志又发行了三期。

115° 数学竞赛

斐波那契的数学才能受到了西西里诺曼帝国皇帝腓特烈二世（他也是知识的鼓吹者）的关注，于是被请到皇宫来，参加一场数学竞赛。皇帝的随从巴勒莫的约翰（John of Palermo）出了三道题，斐波那契都解决了，他的表现赢得了大家的尊崇。

第一题是寻找一个有理数 x，使得 x^2+5 和 x^2-5 都是有理数的平方。斐波那契的答案是 $x=41/12$，当然是正确的，因为 $(41/12)^2+5=(49/12)^2, (41/12)^2-5=(31/12)^2$。

第二个问题是求解下面的三次方程：

$$x^3+2x^2+10x=20$$

斐波那契证明，方程没有能以形如$\sqrt{(a+(\sqrt{b})}$的无理数表达的根。换句话说，没有根能用直尺和圆规构造出来。接着，他得到一个近似解，十进制数表示为

$$1.3688081075$$

精确到了第 9 位小数。我们还不知道斐波那契是如何得到这个答案的。

第三个问题最简单，它问："三个人有三堆钱，比例分别为 1/2，1/3，1/6。每个人都从钱堆里拿钱，直到分文不留。然后，第一个人还回他拿走的一半，第二个人还回三分之一，第三个人还回六分之一。平分这些还回的钱时，他们发现每个人正好得到原来的钱。那么，每个人从钱堆里拿走了多少呢？"斐波那契的解法大概是这样的：令 s 为原先的总数，$3x$ 为还回的钱。在平分

还回的钱之前，三人所得分别为 $s/2-x$，$s/3-x$，$s/6-x$。这是他们还回 1/2，1/3，1/6 之后的钱，所以原来拿走的钱为 $2(s/2-x)$,$3/2(s/3-x)$，$6/5(s/6-x)$，而它们的总和应该等于 s。于是，$7s=47x$，问题是不确定的。斐波那契取 $s=47$，$x=7$。因此，三个人拿走的钱分别是 33，13，1。

116° 傻子

斐波那契有时在作品上署名列奥纳多·毕戈罗（Leonardo Bigollo）。而 Bigollo 有着多个意思：既是“游子”，也是“傻子”。在签署作品时，斐波那契可能自诩为伟大的游子，事实也如此。但还流传着另一个故事：他喜欢这样签名，是因为当时好多人因他对数字的兴趣而把他当傻子，他很高兴让那些批判者们看看一个傻子能做出什么成绩来。

117° “指数”

除了口头的数字,手指的数也曾一度流行。其实,手指和手的不同位置表示不同的数字,比数字符号和名称出现更早。因此,1,2,3,4 的早期书写符号无一例外都是或横或竖的几根线条,代表竖起或张开的手指。digit 一词(原是“手指”或“脚趾”的意思)用来代表 1 到 9 的数字,也可以追溯到类似的起源。

“指数”很快就扩张到了商品交易中出现的大数，而且到中世纪开始国际通行。最后，在欧洲，数字 1，2，…，9 和 10，20，…，90 用左手表示，数字 100，200，…，900 和 1000，2000，…，9000 用右手表示。这样，10 000 以下的任何数字都能拿两只手来表示。后来的一些算术书画了指数的图。例如，左手小指弯曲代表 1，小指和无名指弯曲代表 2，小指、无名指、

中指弯曲代表3，中指和无名指弯曲代表4，中指弯曲代表5，无名指弯曲代表6，小指完全卷起代表7，小指和无名指完全卷起代表8，小指、无名指和中指完全卷起代表9。

根据上面说的，读者现在可以解释9世纪的一个难题了（有人说它是阿尔昆（约775年）提出的）：我见一人手举8，拿走7，还剩6。我们还可以解释在尤维纳（Juvenal）的讽刺作品里看到的一句话："多幸福的人呐！能延缓死亡的时刻，最后用右手来计数寿命。"

指数的好处在于能超越语言的障碍，但它也跟口头数字一样，不能长久，也不适合大量的计算。不过，还是产生了某些简单的手指计算方法，其中，5到10之间的两个数的乘积的计算，是为了减省记忆乘法表的困难。例如，为了计算7乘以9，就在一只手竖起 $7-5=2$ 个手指，在另一只手竖起 $9-5=4$ 个手指。然后把手指加起来，$2+4=6$，为乘积的十位，然后把两手卷曲的手指乘起来，$3\times1=3$，为乘积的个位。结果是63。有些欧洲农民还在这样计算，读者也可以证明这种算法是正确的。

118° 数学的歌颂者

培根（Roger Bacon，约1214～约1294）尽管很有天赋，对数学却很低能。不过，他熟悉很多希腊的几何和天文学作品，而且全面认识了数学的价值，还写了颂词。在《第一作品集》（*Opus Majus*）中，[9] 写下了他最有名的数学颂词："数学是打开科学大门的钥匙……对数学的漠然是对所有知识的伤害，因为对数学无知的人不可能理解其他科学和世间万物。更可怕的是，如此无知的人竟感觉不到自己的无知，也就想不到寻求救药。"

9 培根的三大作品分别叫 *Opus Majus*，*Opus Minus*，*Opus Tertium*，敢在他那个黑暗的年代怀疑亚里士多德，还天真地把书献给教皇尼古拉四世（Nicholas IV），结果被当作异端抓起来了。

119° 亚数学分析

尽管中世纪的数学基本是实用性的，思辨的数学也并未全然湮灭。经院哲学家们的沉思引出了许多理论化的东西，如运动、无穷大、无穷小、连续、离散等，所有这些都是现代数学的基本概念。在一定程度上，学究式的争论和诡辩带来了数学思想从古代向现代的转变，而且还建立了如 E·T·贝尔所说的“亚数学分析”。从这点说，我们也可以认为阿奎纳（Thomas Aquinas，1226～1274，也许是13世纪思想最深刻的人物）对数学的演进发挥过作用。

14、15和16世纪

14世纪是数学荒芜的百年。那是黑死病肆虐的世纪，三分之一的欧洲人口被吞噬了；那也是战乱的百年，政治和经济在北欧动荡。

15世纪见证了欧洲文艺复兴的开端。拜赞廷衰落了，君士坦丁堡在1453年落入土耳其人的统治，难民们带着希腊文明的珍宝逃亡意大利。大量的希腊经典，人们过去只见过残缺的阿拉伯译本，现在可以拿着原始文献来研读了。世纪中叶，印刷术的出现，图书流通的变革，促进了知识以前所未有的速度传播。到世纪末年，人们发现了美洲，开始了环球远航。在贸易、航海、天文和大地测量的影响下，数学活动主要集中在意大利和欧洲中部的一些城市，如纽伦堡、维也纳和布拉格。

16世纪，算术和代数继续发展，而百年里的最大成就，是意大利数学家发现了三次和四次方程的代数解。代数开始从缩写

的时代进入符号的时代。

120° 机械鹰

数学史上的某些杰出人物同时还享有发明家和建筑师的名声，创造了五花八门的力学器械。我们还记得，阿基米德（约公元前287~212）和他的螺旋水泵，记得他为抵抗罗马人防御叙拉古而设计的武器。还有亚历山大城的希罗（Heron，公元前75?），不但编写了数学和物理学的百科全书，还设计了近百种器械和玩具，如虹吸管、蒸汽机、火力水泵、机械点火警报（当寺门打开时，它会被立刻点燃）、风琴、倒酒器、哈哈镜。还有后来成为罗马教皇西尔维斯特二世的热尔贝（约950~1003），制作了算盘、天球仪、地球仪、钟表，也许还有风琴。斯特文（Simon Stevin，1548~1620）震惊世人的是他的帆车。纳皮尔（John Napier，1550~1617）则是他那时代的科幻小说作家，至少在作品中预言了现代火枪、坦克和潜艇；伽利略（Galileo，1564~1642）制造了望远镜，发明了第一台现代显微镜，还设计了一度流行的两脚规。奥特雷德（William Oughtred，1574~1660）发明了曲直两种计算尺。帕斯卡（Blaise Pascal，1623~1662）建造了世界第一台加法计算器，发明了独轮车。荷兰天才惠更斯（Christian Huygens，1629~1695）制造了钟表。年轻的牛顿更是天才卓绝，发明了载灯的风筝、老鼠推动的小磨粉机、还有给他朋友的玩具。莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646~1716）发明了能做乘法的计算器。

一样的人物还有穆勒（John Müller），15世纪最有才能、最有影响的大数学家，一般人熟悉他是“山人”（Regiomontanus），是他出身地哥尼斯堡（“国王山”）的拉丁语形式。年轻时，他

随皮维尔巴赫（Peuerbach）在维也纳学习，后来，老师让他翻译《天文大全》。他还从希腊文翻译了阿波罗尼、希罗和阿基米德的著作。他的论文《论三角》（*De triangulis omnimodis*）写于1464年，到1533年才发表，是他最大的数学功绩，在欧洲第一次系统阐释了平面几何和只有天文学单独考虑的球面几何。

穆勒遍游了意大利和德国，1471年最后定居在纽伦堡。就在那里，他搭建了天象瞭望台，制造了印刷机。不过他赢得最高荣誉的还是一只会拍打翅膀的机器鹰，当皇帝马克西米连（Maximilian）一世来纽伦堡时，它还向陛下敬礼呢。机器鹰表现了非凡的力学天才，被公认为那个时代的奇迹。

1475年，穆勒应教皇西斯笃（Sixtus）四世邀请来罗马参与历法改革。他刚到不久，就在40岁时突然去世了。他的死很神秘，尽管多数证据说明他死于瘟疫，但还有传言说他是被敌人毒死的。

121° “+”“-”的由来

我们如今用的“+”“-”号，第一次出现在魏德曼（Johannes Widman，约1460年生于波西米亚）的一本算术书里，1489年在莱比锡出版。那时这两个记号不是运算符号，而只用来表示盈亏。在魏德曼研究过的稍早的一些手稿里，已经这样用过了。

加号可能是拉丁文*et*的缩写，常用来表示“加”，而减号可能是minus的缩写m的简化。当然，减号也可能就是连字符一样的短线，商人用它来表示从商品的总重量中减去容器的重量。还有其他多少有些道理的解释。

1514年，荷兰数学家胡克（Van der Hoeke）开始用“+”“-”作为代数运算符号，不过在他之前可能已经有人用过了。

122° 未知数的技术

15 和 16 世纪的许多数学家，都跟着斐波那契和阿拉伯人，把未知量称作“物”——意大利语 *cosa*。因为这一点，代数有时也叫“未知数的技术” （*cossic art*）。例如，1525 年，鲁道夫（Christoff Rudolff）写了题为《未知数》（*Die Coss*）的代数著作。这本代数在德国影响很大，斯蒂菲尔（Michael Stifel）在 1553 年又把它改进出版了。就是在鲁道夫的书里，引入了我们熟悉的根号（也许因为它像小写字母 *r*，代表 *radix*，即“根”）。

123° 达·芬奇证明毕达哥拉斯定理

毕达哥拉斯定理有一个巧妙的证明，据说是大艺术家达·芬奇（Da Vinci）设计的。如图 20，这是一种切割加全等的证明方

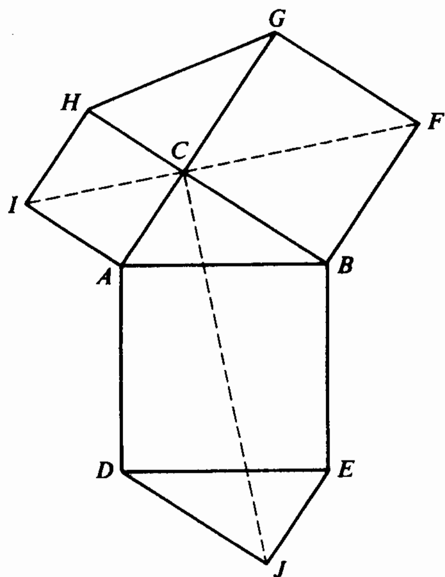
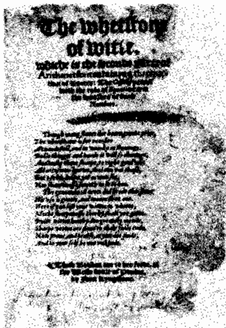


图 20

法。图中，四边形 *IFGH*，*IFBA*，*CJDA*，*JCBE* 都是全等的，因此六边形 *ABFGHI* 和 *ACBEJD* 有相同的面积。但 *ABFGHI* 由直角三角形 *ABC* 的两个直角边上的正方形和两个与 *ABC* 全等的直角三角形构成，而 *ACBEJD* 由直角三角形斜边上的正方形和两个与 *ABC* 全等的直角三角形构成。因此，三角形 *ABC* 的两个直角边的正方形之和等于斜边的正方形。

意大利修士帕西奥里（Luca Pacioli，约 1445 ~ 约 1509）的《神奇比例》（*De divina proportione*）里面有据说是达·芬奇画的正多面体。那书出版于 1509 年。一本数学教科书的作者，能让那样的大艺术家为他画插图，真是罕见的事情。

124° 智慧石



《智慧石》扉页，最后几行即文中引用的诗

16 世纪英国最有影响的教科书作者是雷科德（Robert Recorde，约 1510 ~ 1558）。他用英语写，形式是师生之间的对话。他先在牛津读书，然后在剑桥获得一个医学学位。在那儿，他为两个大学的专门班讲数学。离开剑桥后，他成了爱德华六世和玛丽王后的御医。

雷科德至少写过四本数学教科书，每本书都有一个令人联想的题目：算术题名《技艺的基础》（*The Ground of Artes*，1542），至少重印了 29 次；天文学题名《知识的城堡》（*The Castle of Knowledge*，1551），是最早把哥白尼体系介绍给英国读者的著作之一；几何题名《知识之路》（*The Pathewaie to Knowledge*，1551），包括了欧几里得《原本》的内容精选；代数题名《智慧石》（*Whetstone of Witte*，1557）[10]，其中第一次出现了我们现代的等号。

在《智慧石》的扉页有两段诗，其中的几行是：

10 这个标题与前面说的代数是 cossic art 有文字渊源。在拉丁文里，cos 即“石头”。

把你的智慧拿到石上磨砺，
你会变得更加锐利。
从此不再迟钝和麻木，
磨砺的智慧走向完美。
你已找到验证和荣耀，
自己还要过得更好。

125° 等号的来历

雷科德解释了他为什么用两根平行短线来做等号，“因为再没有哪两样东西更能代表相等的意思。”更有趣的是他在几何书里的一句话。他说：“平行或孪生线是间隔一直相等的线，没有一个地方比其他地方相隔更近；倘若它们在一端比在另一端更近，那就不再平行了。”于是，这大概也影响了他为什么选择等号的两个线段在左右两端相等。后来，哈里奥特（Thomas Harriot，1560～1621）在引入不等号（>和<）时，也许就是因为两个线段在左右两端的距离不同，才那样选择的。(见故事149。)

126° 雷科德之死

雷科德后来成了爱尔兰的“矿产与货币审计师”，最后几年是在狱中的病痛中度过的。多年来人们猜想他入狱是因为个人债务，现在看来他可能在爱尔兰有什么不端的行为。显然他预见了自己的命运，因为他的代数书《智慧石》是这样结束的：

老师：听啊，谁在急急地敲门？
学生：是信差。

老师：什么信？贴耳告诉我。肯定是那事情。看来无可挽回了。我顾不得教学了，我得面对那危险。我命不好，没时间静下来讲课了……我大概还能静静待会儿，但不会长久了。

1558 年，雷科德死在皇家海滨监狱。

127° 里泽



德国大算家里泽

随着文艺复兴以来的教育热情和与日俱增的商务活动，开始出现大量算术教科书。在 17 世纪以前，欧洲至少出版了 300 多种那样的读物。这些教本大体划归两类：隶属于教会学校的古典学者用拉丁文写的，和普通老师为培养小孩经商用本国语言写的。那些老师通常也是市镇的调查员、公证人或收税官，也包括汉萨同盟（日耳曼国家商业城市的一个强大的保护性联盟）支持下的有影响的算术家。

16 世纪最伟大的算术家是里泽（Adam Riese，1492～1559）。他是德国影响最大的算术作者，他在德国的声望犹如雷科德在英国。他出版于 1522 年的商业算术在 1600 年之前至少再版了 37 次。那书声名远播，直到今天，德国人还用 *nach Adam Riese* 来说算术的技巧和精确。

关于里泽还有一个机智的几何故事。一天，他和一个绘图员友好比赛，看谁能在一分钟里用直尺和圆规画出更多的直角。绘图员先画一条直线，然后根据现在中学生学的那种标准步骤画它的垂线。而里泽在直线上画个半圆，然后画出许许多多的内接直角，当然很轻松就赢得了比赛。

128° 哥白尼

有很多学生为老师奔忙的故事。其中一个故事说的是拉蒂卡斯（Georg Joachim Rhaeticus，1514～1576）和他从前的老师哥白尼（Nicolaus Copernicus，1473～1543）。拉蒂卡斯曾在哥白尼门下学过两年，成了老师日心说的热情拥护者。若非拉蒂卡斯的积极要求，哥白尼可能看不到他那伟大著作的出版。据说，刚印好的第一册急忙送来时，哥白尼躺在病榻上已经奄奄一息了，刚好能在失去知觉前抚摸一下他自己的著作。

129° 斯蒂菲尔

斯蒂菲尔（1486～1567）被描写为16世纪德国伟大的代数学家，他最有名的著作是《整数算术》（*Arithmetica integra*），出版于1544年。在书的第一部分里，斯蒂菲尔指出了将算术过程与几何过程结合起来的好处，这也预示了纳皮尔近一百年后发明的对数。

斯蒂菲尔是数学史上最奇特的人物之一。他原来是牧师，追随马丁·路德（Martin Luther），然后成为激进的改革者。他思想乖僻，沉溺于数字神秘主义。根据对《圣经》故事的分析，他预言1533年10月3日是世界末日。他鼓动大量相信他的农民，抛弃耕作和财物，那天和他一起在邻近的山巅等待战车从天降临，把他和他的信众带上天堂。那天慢慢过去了，他越发失去了信心，于是找借口离开焦虑的信众，跑进城里，劝当地警察把他关进监狱。他就这样从被他破坏了生活的愤怒的农民手里，逃出一条命。

从这里我们汲取一个教训，如果你想预言世界末日，那一定

要选一个远远超过可能的寿命的日子。后来，纳皮尔听从了这个明智的忠告，他声称造物者想在1688年和1700年间的某个时候终结世界。

130° "兽化"的艺术

斯蒂菲尔的极端例子是他用数字方法来证明教皇利奥十世是《启示录》里提到的"野兽"："让聪明的，来计算兽的数：因为那是一个人的数，那数是六百六十六。"

斯蒂菲尔从LEO DECIMVS里选出L，D，C，I，M，V，因为这些字母在罗马数系里有意义。然后他加上X来代表利奥十世(Leo X)，因为Leo decimvs有十个字母，然后他略去M，因为它代表神秘物(mysterium)。重新排列这些字母，得到DCLXVI，即666，也就是《启示录》里的那个"兽的数"。这个发现令斯蒂菲尔非常满意，相信他的解释一定来自上帝的启发。

多年以后，对数的发明者纳皮尔证明666代表罗马的教皇，而他同时的耶稣会员邦古斯（Bongus）神父则宣称它代表马丁·路德。邦古斯是这样论证的：如果字母A到I代表数字1到9，K到S代表10到90（间隔10），而T到Z代表100到500（间隔100）[11]，那么

M	A	R	T	I	N	L	V	T	E	R	A
30	1	80	100	9	40	20	200	100	5	80	1

它们的总和就是666。

第一次世界大战期间，人们用算术来证明666一定代表着威廉大帝（Kaiser Wilhelm)。在《启示录》原始的阿拉姆语中，666曾被证明代表古罗马暴君尼禄（Nero)。

德摩根指出，当不同教派用这些解释来相互攻击时，三个6

11 拉丁字母除了没有j和w，和英语字母是一样的。而且，在大写字母中，U就像V。（原注）

的真正意义是，解释者们不过在“五十步笑百步”。

三次和四次方程时代

在古巴比伦的刻版上发现了一些三次方程，阿基米德聪明地解决了他在《论球和柱》中遇到的一个三次方程。另外，欧玛尔·海亚姆在正根的情况下也解过一些三次方程。但16世纪的拉丁代数学家们才第一次根据方程的系数来求解一般的三次和四次方程。如果浓墨重彩地讲，这个发现堪与切利尼（Benvenuto Cellini）的任何作品媲美。

131° 三次方程的代数解

简单说来，事情是这样的。大约1515年，波洛尼亚大学的数学教授费罗（Scipione del Ferro，1465～1526），大概基于他对早期阿拉伯文献的研究，用代数方法解决了三次方程 $x^3+mx=n$。他没发表他的结果，但把秘密告诉了他的学生菲奥尔（Antonio Fior）。到了1535年，布雷西亚的尼古拉（Nicolo，一般称泰塔格利亚（Tartaglia），即“结巴”，因为他小时候受伤影响了说话）宣布他发现了方程 $x^3+px^2=n$ 的代数解法。菲奥尔相信泰塔格利亚在骗人，于是向他挑战，当众比赛解三次方程。泰塔格利亚竭尽全力，在赛前几天发现了没有二次项的三次方程的代数解。比赛要解两类三次方程，菲奥尔只能解一类，泰塔格利亚都能解，赢得了全胜。后来，无赖的卡尔达诺（Girolamo Gardano），一个在米兰教数学和行医的天才，信誓旦旦，花言巧语从泰塔格利亚那儿骗来了解方程的秘诀。1545年，卡尔达诺在德国纽伦堡发表了《大术》（*Ars magna*），一部伟大的拉丁文代数

著作，其中披露了老泰的三次方程解法。泰塔格利亚的勃然大怒遭到了卡尔达诺最好的学生费拉里（Lodovico Ferrari）的反驳，说卡尔达诺是通过第三者从费罗那儿得到解法的，还谴责泰塔格利亚也是从那儿剽窃来的。接着两家发生激烈争吵，泰塔格利亚幸运地活着躲过去了。

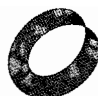
在上面的论战里，有的人物似乎并不太尊重事实，所以我们能看到好多不同细节的说法。

132° 卡尔达诺

卡尔达诺是数学史上的一个非常角色。1501 年他出生在意大利西部的帕维亚，是一个法学家的私生子，后来成为一个情绪矛盾的人。他像学者一样开始了频繁的专业活动，从事专业的同时也做研究、教书，还写数学。他曾远游苏格兰，成功返回意大利后，担任了帕维亚和波洛尼亚大学的重要职务。他还因为信奉异端被关了监狱。他发表了基督生平的星象图，说基督不论做什么都受他星象的指引。从波洛尼亚大学退休后，他移居罗马，成了有名的占星家。奇怪的是，他还作为罗马教廷的占星家领取养老金。1576 年，他在罗马去世，传说是喝毒酒死的，应验了他以前对死亡日期的占星学的预言。有很多关于他的怪癖的故事，例如，他在精神错乱时割去了小儿子的耳朵。大概就在那时，他大儿子因为杀人而被处死了。卡尔达诺赌博成瘾，写过一本赌徒手册，据说里面有些有趣的概率问题。历史也许多少有点儿误会了卡尔达诺。他的自传当然也是这种观点。

133° 泰塔格利亚

泰塔格利亚有个苦难的童年。1499 年他出生在布雷西亚的



一个贫困家庭。他亲身经历了1512年法国对布雷西亚的占领。小城陷落后，多数居民都到教堂寻求庇护，可士兵在那儿大开杀戒。泰塔格利亚的父亲是城里的信差，也被杀害了。小泰塔格利亚被砍了几刀，头骨三处破裂，下巴和上腭也被劈开了。他只有等死了。可藏在别处的母亲来教堂找家人时，发现他还活着，就设法把他带出去。在缺医少药的情况下，她想起受伤的狗总是舔舐伤口，于是，接下来的几天里，她一直舔舐可怜孩子的头颅。最后，孩子活过来了，但上腭的伤留下了语言障碍，从此他得到“泰塔格利亚”的绰号，即“结巴”。

为了让孩子受教育，需要付出巨大的牺牲。母亲好不容易积攒起足够的钱，把他送到学校去了十五天，嘱咐他要好好珍惜机会。结果他偷了本书，后来就靠它自学读写。据说，因为没钱买纸，他只好拿公墓的墓碑来做写字板。

后来，泰塔格利亚赢得了在意大利不同城市教科学和数学的活计。他是天才的数学家，除了解三次方程以外，人们相信他还第一次将数学用于炮火的科学。他写出了公认的16世纪最好的意大利数学书，还出版了欧几里得和阿基米德的著作。1557年他在威尼斯去世。

134° 四次方程的代数解

三次方程解决不久，一般四次方程的一种代数解法也发现了。1554年，意大利数学家达柯依（Zuanne da Coi）向卡尔达诺提出如下问题：“将10分为3部分，使它们成为连比，且前两部分之积为6。”如果记三部分为a，b，c，我们有

$$a+b+c=10,\ ac=b^2,\ ab=6$$

消去a和c，我们得到四次方程

$$b^4+6b^2+36=60b$$

虽然卡尔达诺不能解此方程,他的学生费拉里成功了。卡尔达诺高兴地将这个解法连同泰塔格利亚的三次方程解一起发表在他的《大术》里。

韦　达

法国 16 世纪伟大的数学家是韦达（François Viéte），人们常称他的半拉丁名 Vieta（韦达），他是律师和国会议员，把大多数业余时间都献给了数学。他写了大量三角、代数和几何的书，多数都是自费印刷发行的。他 1540 年生于冯特内，1603 年死在巴黎。

135° 一段友情的开始

韦达有一些迷人的传说，其中一个说，来自低山国家［比利时］的一个外交官向亨利四世（King Henry IV）夸耀说，法国没有一个数学家能解他们国家的罗曼纽斯（Adrianus Romanus, 1561～1615）在 1593 年提出的问题，它需要求解一个 45 阶方程。国王召韦达来，让他看了方程。韦达发现它关联着三角函数，几分钟就给出了两个根，接着解出了另外 21 个根。他忽略了负根。反过来，韦达挑战罗曼纽斯，让他解阿波罗尼的问题（画一个圆与三个给定的圆相切），但罗曼纽斯没能用欧几里得的方法得到解。当他看了韦达的绝妙解法时，就来冯特内访问，结果发展出一段真诚的友谊。

136° 基督的与非基督的

还有一个故事说，韦达成功破译了西班牙的含有几百个字的密码，因而法国在两年的对西战争中赢得了先机。菲利普二世（King Philip II）根本不信有人能破解那个密码，向教皇抱怨说法国人在用魔法对抗他的国家，“对抗基督信仰的实践。”我们要说，抱怨战争对抗了基督信仰的实践，是毫无意义的。

137° 不适合基督徒的劳作

韦达在他1600年的著作《幂的数值解法》（*De numerosa potestatum resolutione*）中提出了不断逼近方程的根的系列过程。尽管这个方法直到1680年才得到广泛应用，过程对高阶方程来说也着实太繁琐了，一个17世纪的数学家干脆说它是“不适合基督徒的劳作”。

斯特文、纳皮尔和布里格斯

在数值计算举足轻重的许多领域，如天文、航海、贸易、工程和战争等，都急切需要计算能更加快速和准确地进行。四大发明满足了这些日益增长的需要：印度－阿拉伯记号、十进制小数、对数和现代计算器。斯特文（Simon Stevin）在他1585年题为《十进制算术》(*La Disme*)的算术名著里最早系统处理十进制小数；而解决大量计算的对数，是纳皮尔的发明，出现在他1615年的题为《对数法则的奇异描述》(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*)的一个小册子里。布里格斯（Henry Briggs）帮助完善了纳皮尔的发明，将大量精力用来编制第一个常用对数表。

斯特文1548年生于比利时的布鲁日，晚年为荷兰军队的总军需官，并负责许多公共工程。在16世纪的低地国家中，他是影响最大的数学家，并因统计学和流体静力学的成就赢得了很高的荣誉。1620年在海牙去世。

纳皮尔生于1550年，那年父亲才16岁，一生主要生活在苏格兰爱丁堡附近的梅奇斯顿城堡的堂皇的宅院里，主要精力都投入到当时的政治和宗教论战。他激烈反对天主教，拥护诺克斯（John Knox）和詹姆斯一世（James I）的事业。从政治和宗教论战解脱出来后，他喜欢上了数学和自然科学。1617年去世。

布里格斯1561年出生在英格兰哈利法克斯，1631年在牛津去世。他的名声在于他是葛雷欣爵士（Sir Thomas Gresham）1596年在伦敦葛雷欣学院设立的第一个几何教授，也是萨维尔爵士（Sir Henry Savile）1619年在牛津大学设立的第一个几何教授。

138° 一身的荣誉

在数学史上，斯特文是最早诠释十进制小数理论的人物之一；在物理学史上，他的名声在于统计学和流体静力学的贡献；对当时的专家来说，他最出名的是在筑城和军事工程的成就；在大众眼里，他最为人称道的是发明了用风帆来驱动大车，载着28个人的大车沿海岸奔驰，轻轻松松就赶超了飞奔的骏马。

139° 自我判断失误

1593年，纳皮尔发表了流传甚广的一本小书，题为《圣约翰启示录的发现》（*A Plain Discovery of the whole Revelation of Saint John*），猛烈抨击了罗马教会，他竭力证明教皇是反基督的，造

物主计划在 1688 和 1700 年间终结世界。书发行了 21 版，至少 10 版是在作者身前发行的。纳皮尔坚信他世代的荣誉都靠这本书。结果他全错了！他那本书，除了个别好奇的读者，今天已经无人过问。相反，他今天远播的名声却几乎惟一的是和他的数学娱乐紧紧连在一起的，也就是他的对数的发明。



约翰·纳皮尔

140° 科幻作家

纳皮尔在勾画蓝图和规划时，还预言性地写了好多可怕的战争凶器。他预言，未来将出现一种炮火，能“杀尽方圆四英里内超过一尺高的生命”，能制造“在水下航行的船”，能发明能“摧毁周围一切”的“张着金属活口”的战车。在第一次世界大战期间，这些预言都成了现实：机关枪、潜水艇和坦克。

141° 认贼

纳皮尔天才卓绝，想象丰富，难怪有人相信他有点儿精神错乱，还有人认为他玩弄巫术。许多故事（也许是无稽之谈）都证实了这些看法。据说，有一次他宣布他的黑公鸡能告诉他哪个仆人偷了他的东西。他把公鸡关进一间黑屋子的盒子里，然后让仆人们一个个走近屋子，把手放在公鸡的背上。他告诉他们，大家走完之后，公鸡就能把贼认出来。其实，纳皮尔早就瞒着大家

在鸡背上涂抹了一层油灰。清白的仆人无所谓，照着主人的吩咐做了，但偷东西的那人却害怕了，没有去摸那公鸡。这样，贼暴露了，因为只有他从黑屋子走出来的时候手是干净的。

142° 抓鸽子

邻居的鸽子飞进纳皮尔的田地，吃了他的谷子，令他很生气。于是他要邻居管好鸽子，否则他就把它们扣下来，抵押被偷吃的谷物。邻居想，抓他的鸽子可没那么容易，就说，只要纳皮尔能抓住那些鸟儿，就随他怎么处置。第二天，邻居傻眼了：只见他的鸽子在纳皮尔的草坪上摇摆蹒跚，纳皮尔正不慌不忙，四下里把它们抓进一只大口袋。原来，纳皮尔把豌豆浸了葡萄酒和白兰地，然后撒在草坪上，就等着抓那些醉鸟进口袋了。

143° 会见

布里格斯很佩服纳皮尔的对数发明，决定从伦敦去爱丁堡会见那位苏格兰天才。布里格斯的行程被耽误了，等他的纳皮尔向朋友抱怨，"噢，伙计，布里格斯先生不会来了。" 就在这时，有人敲门了，布里格斯被引进来到纳皮尔眼前。两人望着对方，几乎一刻钟说不出话来。后来，布里格斯开口了："老天！我那么远跑来，本想看看你这个人，想知道你凭什么智慧或天才的机器，第一个想到了那个天文学的最杰出帮手，哦，对数，天哪，你发现的！可现在发觉它竟那么简单，我倒奇怪为什么没人先发现它呢？" 布里格斯在梅奇斯顿城堡做了纳皮尔的一个月的客人。

144° 几个名词

logarithm 意思是"比数"，是纳皮尔在先用人造数（artificial

number）之后用的表达方式。布里格斯引入了尾数（mantissa，对数的小数部分），来自源于伊特鲁里亚人（Etruscan）的拉丁名词，原来的意思是“加”或“加重”，16世纪时意为“附属”。首数（characteristic，对数的整数部分）也是布里格斯提出的，被荷兰书商和出版家伏拉克（Adriaen Vlacq，1600～1666）采用了，他还帮助布里格斯完成了对数表。奇怪的是，过去的常用对数表都习惯既印尾数，也印首数，到了18世纪，才兴起像今天这样只印尾数的风尚。

145° 拉普拉斯的评论

纳皮尔绝妙的对数发现风靡了整个欧洲。特别在天文学领域，这样的发现来得太是时候了。正如拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749～1827）有一次评说的，对数的发明“缩短了天文学家的劳动，双倍延长了他们的生命”。

146° 历史的怪事

今天，人们普遍将对数看做指数。就是说，如果 $n=b^x$，则我们说 x 是 n 以 b 为底的对数。根据这个定义，对数法则当然就服从指数法则。数学史的一个怪事却是，对数在指数应用之前就发现了。

147° 纳皮尔对数与自然对数

今天我们知道，对数作为计算工具的威力在于，它将乘除法运算归结为更简单的加减法运算。这个思想的先兆，在下面的公式就显露出来了：

$$\sin A\sin B=[\cos(A-B)-\cos(A+B)]/2$$



这在纳皮尔的时代就很熟悉了，而纳皮尔的思路很可能就是从这个公式出发的，否则很难解释他为什么最初将对数限于角度的正弦。纳皮尔为他的理论辛苦了至少 20 年，不论思想起源如何，最终的对数是这样来定义的：考虑线段 AB 和无穷射线 DE，如图 21。令点 C 和 F 分别同时从点 A 和 D 出发，以相同的初始速度沿两直线运动。假定 C 的移动速度在数值上总是等于距离 CB，F 以均匀速度移动。接着，纳皮尔定义 DF 为 CB 的对数。



图 21

就是说，令 $DF=x$，$CB=y$，

$$x = \text{Nap}\ \log y$$

为避免小数的麻烦，纳皮尔令 AB 的长度为 10^7，因为他那时能得到的最好的正弦表算到了小数点后面 7 位。根据纳皮尔的定义，借用他没有的知识，我们有[12]

$$\text{Nap}\ \log y = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)$$

因此，我们经常听到的所谓纳皮尔对数是自然对数的说法，其实毫无根据。我们看到，纳皮尔对数随数的增大而减小，与自然对数相反。

进一步，经过一系列相同时间间隔之后，y 以几何级数形式减小，而 x 以算术级数形式增大。这样我们就有了对数系统的基本法则，即几何级数关联着算术级数。于是，假如 $a/b=c/d$，那么

$$\text{Nap}\ \log a - \text{Nap}\ \log b = \text{Nap}\ \log c - \text{Nap}\ \log d$$

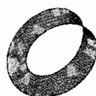
12 用一点微积分，结果很容易证明。我们有 $AC = 10^7 - y$，从而 C 的速度为 $-dy/dt = y$，即 $dy/y = -dt$。积分得 $\ln y = -t + C$。将 $t=0$ 带入计算积分常数，得 $C=\ln 10^7$，于是

$$\ln y = -t + \ln 10^7$$

而 F 的速度为 $dx/dt = 10^7$，因此 $x = 10^7 t$，从而

$$\text{Nap}\ \log y = x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)。$$

（原注）



这是纳皮尔获得的若干结果之一。

就在布里格斯访问纳皮尔时，两人都觉得，如果约定 1 的对数为零而 10 的对数为 10 的某个幂，那么对数表会更有用。于是就诞生了今天所谓的布里格斯对数，即常用对数。这种完全以 10 为底的对数在数值计算中显现了无比的优越性，因为它正应了我们的数系也是以 10 为基底的。当然，以其他某个数 b 为底的数系，还是用以 b 为底的对数来计算最方便。

哈里奥特与奥特雷德

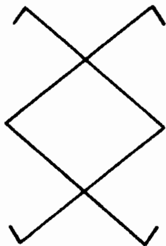
哈里奥特（1560～1621）通常被尊为代数的英国学派的创立者。他在这个领域的大作《实用分析术》(*Artis analyticae praxis*) 在他死后 10 年才出版。这本书花了很多力气来确立方程理论教科书的现代标准。奥特雷德（1574～1660）是 17 世纪英国影响最大的数学作者之一。在哈里奥特关于代数的那本书出版的同一年，1631 年，奥特雷德的《数学入门》（*Clavis mathematicae*）第一版也问世了，那是一本关于算术和代数的书，为在英国传播数学知识发挥了巨大作用。奥特雷德强调了数学符号，提出了 150 个，有 3 个流传到了今天：乘号(×),比例(::)和我们经常用的“两者之差”(～)。

148° 哈里奥特在美洲

哈里奥特对美洲人有特殊兴趣，因为他在 1585 年受瑞利爵士（Sir Walter Raleigh）的派遣，作为测量员随格林威尔（Sir Richard Greenville）爵士的远征队来到了新大陆，测绘当时的弗吉尼亚，即现在的北卡罗莱纳。

149° “<” 和 “>” 符号的起源

在美洲近一年的时间里，哈里奥特借机会研究了印第安语，还学说他们的语言。回英格兰时，他写了一本书，题为《关于新发现的弗吉尼亚大陆、它的物产和土著居民的状态和风俗的真实简报》（*A Brief and True Report of the New Found Land Virginia, of the Commodities, and of the Nature and Manner of the Natural Inhabitants*，1588 年第一版，1590 年第二版）。和哈里奥特一起的船长怀特（John White）为所见景观和人物画了素描。在 1590 年版中，出现了德布莱（Thomas de Bry）据怀特素描制作的版画。其中一幅版画表现了一个印第安酋长的背影，他的肩胛骨上有一个如图 22 所示的符号。如果去掉两端的装饰性短线，将剩下的符号沿水平方向分开，我们就看到两个类似哈里奥特用来表示“大于”和“小于”的符号。于是，正如纽约州立大学史密斯（Charles L. Smith）在波茨坦说的，很可能是印第安酋长背后的一个符号，让哈里奥特想到了那两个沿用了 3 个多世纪的数学符号。


图 22

哈里奥特本人没有留下任何口头或书面的说法，上面的解释也许是对的。不过，哈里奥特以前的符号至少有一个特征似乎不太支持这种猜想。他构造的不等号都是长长的水平拉开的符号，而不像印第安酋长背上的那种粗短的标记。

当然，因为哈里奥特已经采纳了雷科德的长线等号，所以，他的长不等号可能只是用来让表达形式相似。然而，我们愿意相信，哈里奥特有更多的理由像这样发明他

的符号，而不是借用印第安酋长身上的记号。我们很容易相信这样一个合理的动机：在诸如 2 = 2 的表达式中，等号的两个短线左端的空间间隔等于右端的间隔，左边的数也等于右边的数。于是，在考虑表达 4 和 2 之间的数量关系的符号时，由于左边的 4 大于右边的 2，那么为什么不用两根趋于相交的短线呢？这样，短线左端的间隔就大于右端的间隔。由于哈里奥特采纳了长线等号，我们刚才说的表示“大于”的由两根趋于相交的线段组成的不等号，在后来的年月里，为了避免可能的误会，大概完全相交了，最后成为 4 > 2。

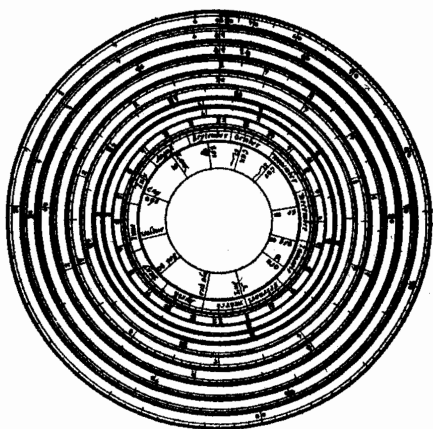
不管哈里奥特发明不等号的动机是什么，刚才的说法更具教育意义，学生听了这样的故事，大概永远不会混淆“ > ”和“ < ”这两个符号了。

150° 巨人的老师

奥特雷德的职业是圣公会牧师。他是出了名的“可怜的传教士”，但当日益壮大的新教徒革命瓦解了他的圣会，威胁到他的生计时，他的布道活动也蒸蒸日上了。他偏爱数学，私下里免费给喜欢它的人讲课。他的学生有瓦利斯（John Wallis）、雷恩（Christopher Wren）和瓦德（Seth Ward），后来分别成了著名的数学家、建筑学家和天文学家。

151° 计算尺的发明

奥特雷德在《比例圆》（*Circles of Proportion*，1632）中描述了一种圆盘式计算尺，可他不是第一个在出版物中描写这种圆形工具的人，他和他的学生德拉梅因（Richard Delamain）之间的优先权之争现在还没结束呢。不过，奥特雷德在 1622 年左右发



图盘式计算尺

明了直线式对数计算尺，大概没有什么疑问。1620 年，冈特（Edmund Gunter，1581 ~ 1626）制造了对数标尺，即直线上的数字间隔与所代表数的对数成比例，用一个两脚规，可将乘除法运算转换为标尺线段的加减。为了实现这种加减，奥特雷德用两个相同的对数标尺，让一个沿着另一个移动。尽管奥特雷德早在 1622 年就发明了这种简单的计算尺，但到 1632 年他才把它写出来。1675 年，牛顿曾让人用过计算尺，但近一个世纪后才开始实际制造。17 世纪时出现了为一些特殊用途（如商品交易和木材度量等）设计的计算尺。双对数尺是 1815 年发明的，而到了 1885 年，法国军官曼海姆（Amédée Mannheim，1831 ~ 1906）才规范了现代计算尺的标准。

152° 奥特雷德的长寿

奥特雷德谈他的大学生活时说：

“除了寻常用在数学研究的工夫，我每夜都把睡觉的时间挤出来，在别人休息的时候，磨炼自己的身体，劳其筋骨，抵御寒冷，学会观察周围的世界。”

奥布里（Aubrey）在他的《名人小传》（*Brief Lives*）中是这

样描写奥特雷德的：

> 他个头小，黑头发、黑眼睛（炯炯有神的）。他的脑子总是不停在转。他常在沙堆上勾线画图……习惯学习到深夜，到十一二点才上床睡觉；他身边带着打火匣，床头柱上固定着墨水瓶。他睡觉很少，有时两三天不睡。（甚至不吃东西，直到找到他需要的东西。）

看来，奥特雷德并不讲究养生之道，或许终身都不在乎。据说，他最后是因为听说查理二世复辟了，而在狂喜中死去的。关于这一点，德摩根曾说："应该补充一点，算是借口吧，他活了86岁呢。"

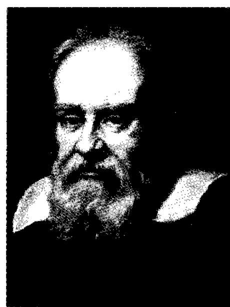
伽利略和开普勒

17世纪初，有两个为数学做出过巨大贡献的杰出天文学家：意大利的伽利略（1564～1642）和德国的开普勒（1571～1630）。伽利略给我们带来了现代的科学精神（实验与理论的和谐）。他建立了自由落体运动的力学，奠定了一般动力学的基础，也是牛顿后来建立现代科学的基础。开普勒为我们展现了科学中最令人惊奇的归纳，他著名的行星运动三定律是他坚韧不拔，历经失败和艰辛，最终换来的成果。这三个行星运动定律是天文学史和数学史的里程碑，牛顿正是为了证明它们，才走向了现代天体力学。

153° 摇摆的灯

伽利略17岁时，被父亲送到比萨大学学医。一天，在比萨的一个教堂服务时，他被悬挂在天花板的一盏大铜灯吸引了，灯来回摇摆，不断变化着幅度。他以自己的脉搏计时，惊讶地发现灯的振荡周期与它振荡的弧度大小无关。后来，他通过实验证明，悬摆的周期与摆锤的重量也是无关的，而只依赖于摆线的长度。据说，伽利略对科学和数学的兴趣先就是因为这个问题而产生的。后来，他偶然听了大学的一个数学演讲，兴趣就更浓了。于是，在他央求下，父母答应他放弃医学，改学他极有天赋的科学和数学。

154° 落体



Justus Sustermans 在1636年画的伽利略像

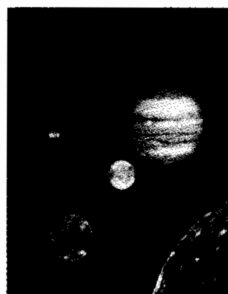
伽利略25岁时，成了比萨大学数学教授。就在做教授期间，他完成了著名的落体实验。在一群学生、教员和牧师面前，他从比萨塔顶放下两个金属球，一个重量是另一个的10倍。两球同时落地，也就反驳了亚里士多德所说的重物体比轻物体下落更快。但伽利略实验明摆着的事实，也没能动摇大学里的其他教授对亚里士多德学说的信仰。伽利略的大不敬惹恼了学校当局，于是遇到了很多生活的麻烦，结果在1591年辞去了教授职位。第二年，他接受了帕多瓦大学的教授职位，那儿有科学追求的良好氛围。伽利略在那儿的近18年时间里，继续教学和实验，赢得了普遍赞誉。

155° 望远镜和更多的烦恼

1607年的某一天，一个做透镜的学徒，荷兰的利伯希

(Hans Lippershay)，在玩弄师父的镜片时发现，如果拿两块镜片相隔一定的距离，透过它们看到的物体会变大。他把发现告诉了师父，师父将两个透镜安在一根管子里，当玩具放在店里展示。一个政府官员看到了，把它买来送给拿骚（Nassau）的毛里斯王子（Prince Maurice)。身为荷兰武装力量统帅的王子看出了这个小玩意儿的军事用途。

1609 年时，伽利略听说了小望远镜发明的消息，他马上就做出一个来，远比利伯希的优越。他应邀在威尼斯展示了自己的作品，威尼斯的议员们站在最高教堂的楼顶，从望远镜里看到了正在靠近的船帆，而肉眼要整整两个小时后才能看到它们。伽利略把一个模型献给威尼斯总督，总督和王子一样，也看出了这个仪器在航海和军事上的巨大应用前景，伽利略因此得到了丰厚的报酬。



木星和它的四颗伽利略卫星

伽利略接着做了四个更大的望远镜，真是名副其实，一个比一个望得更远。(“望远镜”的英文 telescope 来自希腊文 tele，“远”,和 skopos,“看”。)第五个望远镜能放大 30 倍，1610 年 7 月的一个夜晚，伽利略用它看到了木星东边的两颗和西边的一颗小星星。第二天晚上，他惊讶地发现还有一颗小星星在绕着木星转。他发现了木星的四颗卫星，为哥白尼关于小物体绕着大物体旋转的理论提供了确凿的证据。但这个发现再一次激起了很多教会人士的激烈反对，他们信奉亚里士多德的权威，而亚里士多德说过，地球，当然还有人，是宇宙的中心。一个牧师甚至谴责伽利略把木星的四颗卫星放在他的望远镜里！

伽利略用托斯卡统治者的名字把四颗卫星命名为“美第奇星”，托斯卡大公很满意，给伽利略安排了一个好差使。伽利略接受了那个职位，还不明智地离开了空气相对自由的威尼斯，来

到正统闭塞的托斯卡。

在佛罗伦萨，伽利略凭着他的望远镜又发现了哥白尼理论的证据。他还发现存在太阳黑子，这又和亚里士多德对抗起来，他们认为太阳是没有污点和瑕疵的。于是，伽利略又惹了麻烦。哥白尼的著作列在禁书名单上已经200多年了，有人劝伽利略别再坚持哥白尼的理论。然而，1632年，伽利略最终还是在他那部著名的《对话》(*Discorsi*)中发表了他的发现和哥白尼理论的证据。[13]

13 伽利略有两本“对话”。1632年出版的是《关于两大世界体系的对话》(*Dialogo sopra li due massimi sistemi del mondo: Ttolemaico, e Ccopernicono*)；另一本《两门新科学的对话和数学证明》(*Discoris e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuoue scienze*)发表于1635年。(两本都称“对话”，是因为英译本把Dialogo和Discoris都译为Dialogue。)从出版时间和内容看，这里应该指前者，*Dialogo*，而不是*Discoris*。伽利略在给朋友的信中说：“《新科学对话》比我迄今为止所发表过的任何著作都好……它包括了我认为在我的全部研究工作中是最重要的成果。”但因为《两大体系的对话》捍卫了哥白尼学说，在人类文化史和科学史上具有更大的影响。

156° 宗教裁判所和一个伟大学者的悲惨结局

也不是所有教会人士都敌视伽利略和他的发现。一些开明人物，如教皇格雷戈里十五世（Pope Gregory XV）和后来成为教皇的红衣主教巴贝里尼（Cardinal Barberini)，就不反对他的观点。事实上，巴贝里尼还通过伽利略的望远镜证实了他的一些发现。但反对的势力终究还是占了上风。1632年，当伽利略发表他的《对话》，宣布哥白尼理论战胜托勒密理论时，巴贝里尼成为教皇乌尔班八世（Pope Urban VIII)，开始关注反对派了，他们说伽利略书中的“傻子”角色影射了亚里士多德学派的托勒密宇宙理论的支持者。伽利略的书被禁了，还有一个委员会被指派来调查这件事情。报告对伽利略很不利，指控他“主张地球在动而太阳静止”。伽利略被捕了，站在宗教裁判所的面前。1633年6月22日，这位疾病缠身的老人在酷刑的威胁下被迫宣布：“我起誓，我诅咒、憎恶我的谬误和异端邪说，以及一切与神圣教会学说对立的谬误和宗派；我发誓将永不在口头和书面发表和赞同任何可能招致对我相同怀疑的言论；如果我知道有任何异端或可能的异端分子，我将向宗教法庭或宗教裁判所或我所在教区的主教控告揭发。”



伽利略《关于两大世界体系的对话》

老学者就这样违背了自己的良心，生活也破碎了。他被允许继续做一些“无害的”科学研究，但他已经双目失明，1642 年 1 月，在宗教裁判所的监视下，像一个囚犯在自己的家中离开了人世。

传说，在被迫放弃自己的观点，否认地球运动后，伽利略站起来，轻声对自己慢慢嘟哝，“可地球仍然在动呀。”不论有没有这事，这句话却成了一句俗语，意思是不论压力多大，真理总会胜利。正应了这句话，就在伽利略在囚禁中死去那年，1642 年，牛顿诞生了。

157° 权威与科学论证

伽利略有句话说："在科学问题里，一千个权威也抵不过一个人踏实的论证。"

158° 伽利略调和科学与宗教

伽利略一生都信宗教，是个虔诚的天主教徒。因此，当他看到他作为科学家的观察和推理所必然产生的观点与他作为忠实信徒的教会的经典发生矛盾时，他是非常痛苦的。他觉得必须为自己思考科学与宗教的关系。历史上，许多信奉基督教的科学家都有过这样的境遇。例如，19 世纪中叶，他们就发现很难调和达尔文的进化论与《圣经》对生命的创生解释。

伽利略的结论是，圣经不是、而且从来不打算是天文学、生物学或其他任何科学的教科书。一句话，它不是为了教导我们可以靠自己去发现的那些真理，而是为了向我们揭示我们不能靠自己发现的精神的真理。这样，科学与宗教的冲突在于，这些精神真理在《圣经》中是以一种人们感到自然的方式表达出来的，对那些人来说，精神真理原本就是那样在他们中间传承的。但这不过是历史的小插曲，无关紧要的。科学家不应厌烦《圣经》以古代希伯来人所认同的方式描绘世界，教会人物也不应诅咒科学家以违背《圣经》教义的方式描绘世界。以什么方式来描绘世界，完全遵从《圣经》的现实目的，而且，没有什么方式会与《圣经》的精神教义相抵触。

159° 伽利略－开普勒通信

开普勒公开宣传哥白尼学说的《宇宙之谜》（*Mysterium cos-*

mographicum）在1596年出版时，送了一本给伽利略。1597年8月4日，伽利略写信给开普勒，感谢他送的书：

> 如果有更多的人有您那样的思想，我当然敢带着我的观点面对大众。然而情况并非如此，我不能那么做……
>
> 您的真诚的朋友
>
> G·伽利略
>
> 帕多瓦科学院数学家

几个月以后，1597年10月13日，开普勒给伽利略回信，鼓励他的哥白尼学说的伙伴要勇敢站出来，公开他的信仰：

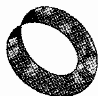
> 伽利略，愉快地站出来吧。如果我没错，在著名的欧洲数学家中，只有极少数的几个会背离我们……

但我们在前面看到了（故事156），伽利略选择了拖延，结果还是遭了报应。

160° 第谷的金鼻子

1600年，开普勒认识了著名丹麦-瑞典天文学家第谷（Tycho Brahe），成为他的助手。第谷脾气暴躁，刁钻刻薄，很难和他一起工作。

有人装了玻璃假眼，有人装了木头腿，而第谷有一只金鼻子。第谷早年在罗斯托克大学时，曾与一位丹麦贵族决斗，结果倒霉，鼻子失去好大一块肉。他只好把蜡、银和金黏合起来，填充那块空缺。



1601 年 10 月，第谷突然去世。开普勒接替了老师的位置，也接管了大量精确的行星运动的天文学数据。

161° 开普勒的毅力

常听人说，只要专心致志，坚持足够长的时间，那么几乎任何问题都能解决。就像爱迪生（Thomas Edison）说的，创造是百分之一的灵感加百分之九十九的汗水，问题的解决是百分之一的想象力加百分之九十九的毅力。最能说明这一点的，科学史上也许再没有一个例子能好过开普勒解决环绕太阳的行星运动问题所表现的毅力。开普勒完全赞同哥白尼的理论，相信行星在绕着中心的太阳运动。他努力寻求那些轨道的本质和位置，确定行星在轨道的运行方式。开普勒在几乎没有数据检验时，就有过许多高度想象的尝试（例如故事 64），后来他继承了第谷大量的非常精确的行星运动观测资料。于是，问题就成为寻求一种行星运动模式来符合第谷的观测数据。第谷的记录实在可靠，哪怕计算结果对观测位置的偏离只有月亮视直径的四分之一，那样的模式也



必须抛弃。于是，开普勒先凭他的想象猜测一个可能的模式，然后，为了证明或否定那个猜想，他以可怕的韧性完成了大量枯燥的计算。他经历了数百次徒劳的尝试，进行了无数计算，22 年如一日，热情不减，坚韧不拔，终于解决了问题，成就了著名的行星运动三定律：

Ⅰ 行星沿以太阳为一个焦点的椭圆轨道绕着太阳运动。

Ⅱ 从行星到太阳的半径矢量在相同时间间隔里扫过相同的面积。

Ⅲ 行星完成一周轨道运动的时间的平方正比于轨道半主轴的立方。

这些从第谷大量数据中发现的经验关系，是科学史上最引人注目的归纳。1619 年，开普勒满怀自豪（这是应该的）地在他的《世界的和谐》的前言里爆发了诗一般的激情：

> 我是在为我的同辈——或者后代（那也无所谓）——写一本书。也许我的书要在百年之后才能等到它的一个读者。上帝不是过了 6000 年才等来一个观察者吗？

162° “微斯人”

现在我们看到了为什么解决问题的专家那么少。专门解决问题的人，必须兼有两种不同的秉性：无限的想象力和坚韧的毅力。

163° 纯数学与应用数学

没有人知道纯粹数学什么时候能得到意外的应用。正如惠威尔（William Whewell）说的："假如希腊人不应用圆锥曲线，开普勒就不可能取代托勒密。"有趣的是，希腊人运用圆锥曲线，只是为了满足他们对知识的渴望，而在1800年之后，它们竟发挥了那么辉煌的实际应用。

164° 不幸的一生

令人悲哀的是，开普勒的一生经历了太多的几乎难以忍受的人间不幸。才四岁就感染了天花，损坏了视力。除了寻常的人生磨难，他还经历了痛苦的青年时代，婚姻带来不尽的烦恼，最喜欢的儿子死于天花，妻子发疯而死，格拉茨城被天主教徒占领后，他被赶下了格拉茨大学的讲台。他母亲因为巫术被关进监狱，为了救母亲走出囹圄，他绝望地奔走了几乎一年的时间。他自己也差点儿因异端邪说被定罪；他的薪水总被拖延。有报告说，他第二次婚姻比第一次更不幸，尽管他小心翼翼，权衡利弊，选了十一个女孩儿，还是选错了。他不得不靠替人算命来挣钱，最后，为了要回拖了好久的薪水，他在旅途中死于热病。

165° 命理学和神学

数字命理学和神学似乎在一个方面很相似：它对一个人在科学上相信什么或不相信什么，不一定有多大关系。20世纪一些杰出的科学的数字命理学家，在科学上和他们的那些蔑视一切数字神秘主义的对头也一样有名。

德萨格和帕斯卡

德萨格（Gerard Desargues，1593～1662）和帕斯卡（1623～1662）是19世纪射影几何领域的伟大研究者们的先驱。德萨格是工程师和建筑师，曾经还是法国军官。他30多岁在巴黎时义务做过系列几何讲座，给当时的人们留下了深刻印象，后来还出版了一本书。在他研究的欣赏者中，就有年轻的帕斯卡，未来法国著名的数学家、物理学家和文学家。实际上，帕斯卡曾承认德萨格是他灵感的源泉。两人在同一年去世，德萨格69岁，帕斯卡39岁。

166° 德萨格被遗忘的书

1639年，开普勒去世9年后，巴黎出现了一篇研究圆锥曲线的文章，极有创见却几乎没人注意，作者是德萨格。数学家普遍都忽略了这篇作品，很快就把它忘了，一本儿也没留下来。两个世纪以后，法国几何学家夏莱（Michel Chasles）写他的几何史时，已经无法估量德萨格研究的价值了。然而，6年以后，1845年，夏莱偶然看到了那篇文章的一个手稿抄本，是德萨格的学生海尔（Philippe de la Hire）写的，从此人们发现这是综合射影几何早期发展的一部经典。

人们起初漠视德萨格的小书，大概有几个原因。两年前笛卡儿提出的更灵活的解析几何把它掩盖了。几何学家们把工夫都用来发展那个新技术或者尝试把无限小量用于几何。另外，德萨格用了一种不合时宜的古怪写作方式。他引进了大约70个新名词，许多还有着晦涩的植物学渊源，其中只有“乘方”（involution）

一词流传下来。奇怪的是，这个词之所以留下来，是因为文章的评论者专门把它从德萨格的术语中挑出来进行了严厉的批评和嘲笑。

167° 帕斯卡的早熟

帕斯卡从小表现出非凡的数学才能，他妹妹（后来成了皮埃尔夫人）讲的几个故事，说了他年轻时候的成就。因为身体虚弱，他小时候常被关在家里，使他不致过分劳累。父亲认为年轻人的教育应该首先限于语言的学习，而不该涉及任何数学。不让学数学，反倒激起了小家伙的好奇，他向老师问几何的本质。老师告诉他，那是研究精确图形及其不同部分的性质的学问。老师对几何的描述外加父亲的反对，刺激他放弃了玩儿的时间，在几个星期里偷偷发现了好多几何图形的性质，特别是三角形三个内角的和等于一个直线角。关于后面这个发现，他把一个纸三角形的顶点折向内接圆的圆心（如图 24），或者像图 25 那样，折

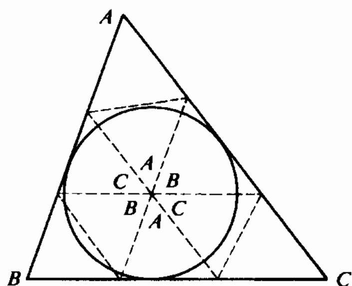


图 24

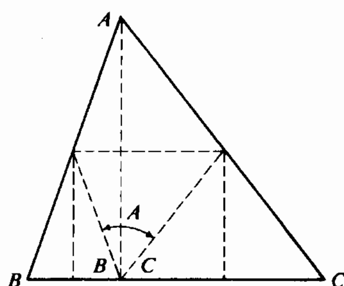


图 25

向高的垂足点。一天，父亲正好碰见他做几何，为他的才能惊呆了，于是给了他一本欧几里得的《原本》，小孩儿贪婪地读着，

很快就掌握了。

14 岁时，帕斯卡参加了一群法国数学家的周末聚会——那聚会在 1666 年成为法兰西科学院。他 16 岁时写了篇圆锥曲线的论文，笛卡儿简直不相信那是一个小孩儿写的，而认定是他父亲的作品。十八九岁那年，他发明了第一个计算机械，帮父亲审计在鲁昂的政府账目。帕斯卡后来还制造了 50 多台计算器，有的现在还保存在巴黎法国国立理工学院（Conservatoire des Arts et Metiers）。23 岁时，他对托里切利（E. Torricelli）的大气压研究发生了兴趣，开始在物理学中发挥他那非凡的才能，引出了今天每个中学生都知道的流体力学的帕斯卡原理。

168° 数学史上最伟大的“本该出现的人物”

1650 年，帕斯卡惊人而早熟的活动突然终结了，那年他身体垮了，决定放弃数学和科学研究，而专心宗教沉思。然而 3 年后，他又回到数学。这次，他写了关于二项式系数的三角形排列的《论算术三角形》（*Traité du triangle arithmétique*），做了几个流体压力的实验，在与费马的通信中帮助他奠定了概率的数学理论的基础。但在 1654 年下半年，他遭遇了一件神奇的事情。他的马冲过了纽利河上一座桥的栏杆，而他只因为缰绳不可思议地断了才活下来。他认为这是一个强烈暗示，告诉他那些革新的活动令上帝不高兴了。从此，他把这件意外写在一小张羊皮纸上，戴在胸间，忠实地回到了他的宗教沉思。

后来，只有一次，在 1658 年，帕斯卡又回到数学。那次他在牙疼时有了些几何想法，而牙也突然不疼了。他认为这是神的旨意，于是虔诚而勤奋地用了 8 天时间来发展他的思想。这回，他相当完整地说明了摆线的几何，解决了后来作为挑战而提出来

并困惑了其他数学家的一些问题。他在短暂的一生最后写了著名的《外省来信》和《思想录》（*Penseés*），至今还是法国早期文学的范本。

帕斯卡被誉为数学史上伟大的“本该出现的人物”。那么非凡的天才，那么深刻的几何直觉，假如条件更好，他本该做得更多。但他的健康却那么不堪，一生的多数时间都在忍受病痛的折磨，而且刚成人就遭遇了来自宗教神经的精神苦难。

169° 帕斯卡的“神秘六边形”定理

帕斯卡圆锥曲线研究的一大成果是图 26 所示的以他名字命

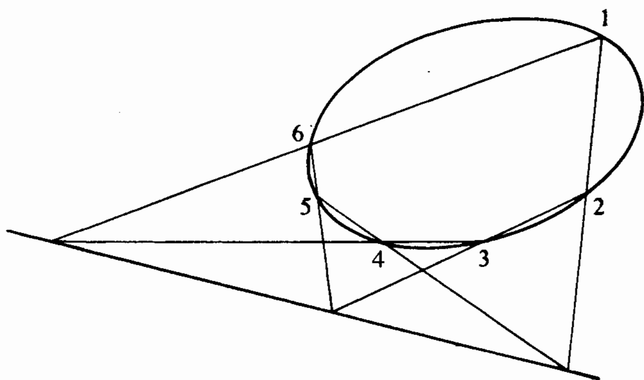


图 26

名的定理：内接于圆锥曲线的六边形（不必是凸的）的三对边的交点处于一条直线。有报告说（更像传说），通过考虑内接六边形的顶点合并的特例，帕斯卡从他的伟大定理导出了 400 多个推论。在任意情形，帕斯卡定理的推论都多且有趣，而对那些组合的研究之多，简直令人难以置信。为说明这一点，我们称那条交点所在的直线为那个内接六边形的帕斯卡直线。从圆锥曲线的 6 点，有 5！/2 =60 种方式来构成六边形，而据帕斯卡定理，每

个六边形都对应一条帕斯卡直线。这 60 条帕斯卡直线三个一组地经过 20 个所谓斯特纳（*Steiner*）点，而这些点又 4 个一组处于 15 条所谓普吕克（*Plücker*）直线。帕斯卡直线也同时三个一组经过另外一组所谓的基克曼（*Kirkman*）点，那样的点集有 60 个。对应每个斯特纳点有 3 个基克曼点，这样的 4 点处于一条凯莱（*Cayley*）直线。共有 20 条凯莱直线，它们四个一组经过 15 个所谓萨蒙(*Salmon*)点。这样的组合还有很多推广，很多别的性质;而这个“神秘六边形”定理的不同证明,也提出了很多很多。

170° 帕斯卡的笔名

正如在《外省来信》一样，帕斯卡有时以 Lovis de Montatl 的笔名写东西。在他各种挑战性问题中，他称自己是 Amos Dettonville，难怪莱布尼茨有时称帕斯卡为 Dettonville。Amos Dettonville 这个名字是改变 Lovis de Montatle 的字母次序形成的。

171° 两个很有实践意义的贡献

有趣的是，帕斯卡还是我们今天熟悉的独轮车的发明者。而且，他在 35 岁时还构想了公共汽车——想法很快就实现了，每座 5 个苏。

172° 概率论的妙用

在《思想录》第 7 章，帕斯卡提出一个有趣的论证：因为永恒幸福的价值必然是无限的，那么，即使保证幸福的宗教生活的几率也是很小的，于是期望值（由两者的乘积度量）足以令人皈依宗教。

笛卡儿和费马

如果说德萨格和帕斯卡开辟了射影几何的新领域，笛卡儿和费马则构建了现代解析几何的思想。两个领域有一点根本的差别，前者是一个几何分支，而后者是一种几何方法。对学习初等数学的学生来说，最令人激动的科学经历莫过于走近这个新奇有力的解决几何问题的方法。这种思想方法的精髓，以平面情形为例，就是建立平面点与实数对之间的对应，从而有可能将平面曲线与二元方程对应起来，使平面的每条曲线都有一个方程 $f(x,y)=0$，而对每个这样的方程，在平面存在一条曲线或一个点集。同样，这也建立了方程 $f(x,y)=0$ 的代数和解析性质与相应曲线的几何性质之间的对应。几何巧妙地归结为代数和分析。

笛卡儿 1596 年出生在图尔附近，1612 年离开学校不久，他就去了巴黎，用一些时间研究数学。1617 年起，他当了几年兵，最早是参加拿骚（Nassau）的莫里斯王子的军队。刚一退伍，他就用了四五年的时间漫游德国、丹麦、荷兰、瑞士和意大利。然后，他又在巴黎住了几年，继续他的数学研究和哲学思考，还做过光学仪器，决定移居正处于巅峰时期的荷兰。他在荷兰住了 20 年，全身心地投入到哲学、数学、科学和写作。1649 年，他应克里斯蒂娜（Christina）女王的请求到了斯德哥尔摩，1650 年初，在那儿去世。

费马 1601 年（?）出生在图卢兹附近。[14]他是皮革商的儿子，在家接受了早期教育。30 岁时，他得到图卢兹地方议会议员的职位，谦逊而谨慎地履行着他的职责。他是一个拙劣的律师，退休以后的全部闲暇都用来研究数学了。尽管生前没发表多少东

14 参见《告别数学圈》(A15)。

西，他还是与当时的许多一流数学家有过大量科学通信，从而产生了巨大的影响。他对数学的众多分支都有过重要贡献，被称为17世纪最伟大的法国数学家。更特别的是，他还被大众认为是历史上最伟大的数学家之一。1665年，他在卡斯特雷(Castres)去世。

173° 一个挑战，一段友情

有故事说（其真伪尚有疑问），笛卡儿在1617年参加拿骚莫里斯王子的军队之后，曾走过驻地布雷达（Breda）的街头，偶然看到一张荷兰语的布告，引起了他的好奇。笛卡儿拦住路过的人，请他把布告的文字翻译成法文或拉丁文。过路人恰好是多特的荷兰语学院院长贝克曼（Isaac Beeckman），他很乐意做翻译，不过要笛卡儿回答那个问题，因为布告上是一个挑战性的几何问题。笛卡儿在几个小时内解决了问题，也和贝克曼结下了热烈的友谊。

174° 一个思想的产生

关于将笛卡儿引向解析几何思想的最初线索，流传着几个故事。一个故事说，他是在梦里想到的。1619年11月10日，圣马丁节前夜，他所在的军队正驻扎在多瑙河畔。他告诉大家，他经历了三个奇异而连续的梦，从而改变了整个生活历程。他说，梦境为他揭示了“一门非凡的科学”和“一个神奇的发现”，照亮了他的生活目标，决定了他未来的奋斗方向。笛卡儿从来没有具体解释过那是什么非凡的科学，什么神奇的发现，但有人相信它们就是解析几何或代数在几何中的应用，从而将所有科学归结为几何。18年后，他在关于一般科学的著名哲学论文《方法导论——正确引导自己的理性并在科学中寻求真理》（“*Discours de la*

method pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences"）里解释了部分思想。这篇作品带了三个说明那个方法的附录，在第三个附录里就有解析几何。作品的发表是在1637年。

另一个故事有点儿像牛顿和下落苹果的故事，说的是，笛卡儿闪现解析几何思想时，正在看着一只小虫子在他房间天花板的一个角落爬行。他突然想到，只要知道小虫到两面墙的距离之间的关系，就能描写天花板上的路线。后面这个故事尽管可能是假的，但很有方法论的价值。

175° 笛卡儿的忠告

笛卡儿小时候身体很虚弱。8岁时，他被送到拉弗莱齐（La Fleche）的耶稣会学校。神父查理（Father Charlet）很喜欢他，觉得为了培养这个虚弱孩子的心智，必须先锻炼他的体质，于是允许他早上睡懒觉，如果不愿意和同学玩儿，他可以一直呆在宿舍里。如此惬意的生活成了他一生的习惯。笛卡儿后来证实，他在早晨休息时的沉思，是他出成果的最佳时机，也是他的哲学和数学的源泉。



笛卡儿(1596～1650)

笛卡儿在1647年访问帕斯卡时，建议多病的主人也学他的样子，早上多睡，到中午才起来，除非自己愿意，别管任何叫他起床的人。笛卡儿说这是最佳养生方法，也最能做好数学。遗憾的是，主人家没理会客人的好意。

176° 两个数学记号

在《导论》的第三个附录《几何》(*La geometrie*) 中，笛卡儿确立了一个沿用至今的习惯：以开头的字母记已知量，以末尾的字母记未知量。他还引入了我们今天的指数系统，如 a^3，a^4 等等。这个体系原是别人提出的，但笛卡儿可能自己独创了它，经过他的运用，习惯才确立下来。

177° 笛卡儿之死

1649 年，笛卡儿收到 19 岁的瑞典女王克里斯蒂娜的请求，要他将学问带进她的宫廷，并教她哲学。笛卡儿被皇家的光环和专门来接他的军舰眩晕了，虽然有点儿疑虑和犹豫，最终还是离开了荷兰那平静安宁的生活，走进了斯德哥尔摩的喧嚣与狂热。克里斯蒂娜女王似乎更像运动员而不像学者，她喜欢早晨五点坐在窗户大开的寒冷的图书馆里，那是她学哲学的惟一场所。于是，可怜的笛卡儿不得不在讨厌的天亮前的时间里从温暖的被窝爬起来，走过寒风凛冽的广场，来到清冷的宫廷图书馆给任性的女王上哲学课。除了这令人发疯的早课，笛卡儿还发现他仿佛处在了名副其实的蜂窝里，四处散布着恶意的流言，说他一个外国人在影响女王。不但身在斯德哥尔摩的冷酷氛围，他还远离了习惯的懒觉，以前平静的私生活也被破坏了，这一切令笛卡儿难以忍受。在瑞典过了几个月以后，疲惫的哲学家得了肺炎，卧病在床，10 天就死了，成了自负、虚荣而任性的女孩儿的牺牲品。

178° 费马数

有的伟人过着多彩的生活，自然孕育了优美的故事和传说，

而有的伟人生活平静而单调，没有留下什么非凡的事情。费马属于后者。然而还是有很多费马的故事，尽管他的个人生活平淡无奇，他的数学创造——或者，在他的情形我们应该说，他的数学娱乐——充满了妙趣横生的故事。

例如，费马至死都相信自己发现了他寻找终生的一个素数公式：

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

他至少在七个不同的地方表示过，F_n 对所有非负整数 n 都是素数，尽管他总是谨慎地承认他没能证明这个猜想。对 $n=0$，1，2，3，4 我们有 $F_n=3$，5，17，257，65537，它们都是素数。但是 1732 年，伟大的瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler）证明了

$$F_n = 4\ 294\ 967\ 297 = (6\ 700\ 417)(641)$$

因而是复合数。从那时起，经过一个个单独的没有一般应用的证明，人们发现 F_n 对 $n=6$，7，8，9，11，12，15，18，23，36，38，73 都是复合数，而在 $n=0$，1，2，3，4 的情形以外，F_n 没有一个素数。结果是，虽然费马感觉 F_n 对所有非负数 n 都是素数，今天的数学家们普遍认为，除了对 $n=0$，1，2，3，4 外，F_n 都是复合数。

形如 F_n 的数叫费马数，它随 n 的增大而迅速增大。例如，F_{10}（第一个不能确定其是否为素数的数）有 309 位，F_{36}已证明包含了 2 万亿位。而 F_{73}如果用本书的字号写出来，全世界所有图书馆里的所有图书都写不下它！

与费马数有关的一个重要发现出现在 1796 年。古希腊人证明了如何用直尺和圆规做出正 3，4，5，6 和 15 多边形。继续二分角度（或弧长），我们可以用欧几里得工具做出边数为 2^n，$3(2^n)$，$5(2^n)$和 $15(2^n)$的正多边形。差不多到了 19 世纪，人们才

发现能以这些有限工具做出的其他正多边形。1796 年，才 19 岁的杰出的德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss）发展了一个理论，证明可以用欧几里得工具做出具有素数边的正多边形，当且仅当那个素数是费马数。这样，希腊人不知道的正 17，257 和 65 357 边形也能用直尺和圆规画出来了。

人们发现了正 17 边形的很多欧几里得做法。1832 年，里歇洛（Richelot）发表了正 257 边形的考察，林根的海尔梅斯（Hermes）教授花了 10 年时间来构造正 65 357 边形。据说，正是高斯在青少年时发现了可以用直尺和圆规做出正 17 边形，他才下决心一辈子做数学。他对这个发现深感自豪，甚至要求在他的墓碑刻上正 17 边形。尽管这个愿望没能实现，屹立在他出生地布伦瑞克的塑像底座上还是铭刻着一个正 17 边形。

179° 费马的无穷递降法

[下面的故事经允许引自伊弗斯发表在《数学教师》1960 年 3 月号“历史记述”专栏的同名文章，pp. 195～196。]

著名古希腊数论专家丢番图至少写过三本数学书，其中《算术》当然是最重要的。《算术》是用解析的方法处理代数数论，标志着作者是这个领域的天才。《算术》现在只留下最初十三卷的六卷，这六卷解决了大约 130 个不同形式和难度的数论问题。《算术》有许多评注，不过到 1463 年才由“山人”穆勒呼吁将希腊文本译成拉丁文。1575 年，克西兰德（Xylander，海德堡大学教授霍尔茨曼（Wilhelm Holzmann）杜撰的一个希腊名字）才响应了这个号召，完成了有价值的翻译并添加了评注。后来，法国人雷切·德·梅齐里亚克（Rachet de Meziriac）用了克西兰德译本，在 1621 年出版了第一个希腊文与拉丁译文对照

的评注本。

费马有过一本雷切版的丢番图《算术》，拿它做课本，也做笔记本。费马对数论领域的许多贡献都写在《算术》的页边。1670 年，费马去世 5 年后，他的儿子克雷蒙 - 塞缪尔（Clement-Samuel）将这些页边评注编进了一个新的《算术》版本，可惜印刷太粗糙了。我们在这个版本里看到，费马在第六卷问题 26 旁写了如下评注：

> 边长为有理数的直角三角形的面积不可能是平方数。经过长期艰难的思考，我得到了这个定理的一个证明。我在此把证明写下来，因为其过程可能给数论带来惊人的进步。

接着就说明那个证明。

费马提到的那个过程极有创造性，从此被称为费马无穷递降法。费马显然在很多场合成功地运用了这个方法。例如，在给罗伯瓦（Roberval）的一封信中，费马描述了他为了证明雷切提出的一个猜想所遭遇的困难。那个猜想说，每个正整数都能写成至多四个平方数的和。费马在信中还说，他最后用他喜欢的无穷递降法成功解决了问题。1897 年，在莱顿（Leyden）图书馆的一堆惠更斯的手稿里发现了一篇文章，费马描述了无穷递降法。[15]

15 参见《告别数学圈》(A18)。

无穷递降法在确立否定结果时显得特别有用。这个方法可以概括如下。为了证明不存在正整数 a，b，c，…满足关系 R（a，b，c，…），假定相反情形成立。在此假定下，证明 R（a_1，b_1，c_1，…）成立，其中 a_1 是正整数且 $a_1 < a$。接着，我们可以同样方式证明 R（a_2，b_2，c_2，…）成立，其中 a_2 为正整数且 $a_2 < a_1$，如此下去以至无穷。但只有有限个正整数小于 a，这是不可

能的。于是我们引出矛盾，从而得到结论：关系 $R(a,b,c,\cdots)$ 不能为正整数 a，b，c，…所满足。

为说明费马的无穷递降法，我们考虑把它用于一个简单问题。我们用这个方法来证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。假定相反情形成立，即 $\sqrt{2}=b/a$，其中 a，b 为正整数。由于

$$\sqrt{2}+1=1/(\sqrt{2}-1)$$

因此

$$b/a+1=1/(b/a-1)=b/(a-b)$$

还有

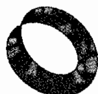
$$\begin{aligned}\sqrt{2}=b/a&=b/(a-b)-1\\&=(2b-a)/(a-b)=b_1/a_1\text{（例如）}\end{aligned}$$

但 $1<\sqrt{2}<2$，以 b/a 代替 $\sqrt{2}$，然后乘以 b，我们有 $b<a<2b$。现在，由于 $a<2b$，有 $0<2b-a=a_1$。又因为 $b<a$，有 $a_1=2b-a<a$。因此 a_1 是小于 a 的正整数。重复以上过程，我们发现 $\sqrt{2}=b_2/a_2$，其中 a_2 是小于 a_1 的正整数。这个过程可以无限重复下去。但正整数不可能无限减小，于是我们开始的假定 $\sqrt{2}=b/a$（其中 a，b 为正整数）不可能成立。就是说，$\sqrt{2}$ 是无理数。

180° 数学史上最撩人的页边评注

费马写了三千多篇数学论文和大量评注，但只是在去世前 5 年以隐匿的名字 M. P. A. S. 发表了一篇。他的许多数学发现，是在给数学家伙伴的信中或者在丢番图《算术》的雷切译本的评注中透露出来的。

在他那本丢番图的第二卷问题 8 的旁边，费马写下了数学史上最撩人的一段评注文字。丢番图考虑的问题是，“将给定的平



方数分解为两个平方数。”费马的评注写道：

> 为了把一个立方数分解为两个立方数，或者把一个四次方数、或更一般地，把任意高于二次幂的数分解为两个相同幂次的数，是不可能的。我确信已经发现了它的一个绝妙的证明，可惜页边太窄，写不下它。

这个著名的猜想说的是，当 $n>2$ 时，不存在正整数 x，y，z，使 $x^n+y^n=z^n$，即大家知道的“费马的最后定理”。费马是不是真的有了一个对猜想的证明，也许永远是一个谜。他的真诚不容置疑，因此我们应该相信他认为他有了一个证明，又因为他卓绝的能力，我们还应该相信即使证明包含了什么谬误，那谬误也一定很微妙。

自费马以来，许多最杰出的数学家都将他们的才智奉献给了这个问题，但一般的猜想还是没有解决。费马在其他场合对 $n=4$ 的情形给出了一个证明，欧拉证明了 $n=3$ 的情形（后来由他人完善了）。1825 年左右，勒让得（Legendre）和狄利克雷（Dirichlet）独立证明了情形 $n=5$；1839 年，拉梅（Lame）证明了情形 $n=7$。这个问题的极其重要的进展来自德国数学家库默尔（E. Kummer）。1843 年，库默尔向狄利克雷提交了对一般猜想的一个假想证明，狄利克雷指出了论证中的一个错误。然后库默尔更严格地回到问题，几年后，他发展了高等代数的一个相关主题（即所谓的理想论），从而导出了费马关系不可解的非常一般的条件。后来关于这个问题的几乎所有重要进展都建立在库默尔理论的基础上。现在我们知道“费马最后定理”对所有 $n<4003$（这是 1955 年在 SWAG 数字计算机帮助下证明的）和其他

许多特定的正整数，都肯定是正确的。

1908 年，德国数学家沃尔夫斯克尔（P. Wolfskehl）向哥廷根科学院遗赠了 100 000 马克，作为第一个完全证明“定理”的奖金。结果招来了大量追名逐利的门外汉们的所谓证明，从此以后，这个问题多少有点儿像三等分角和化圆为方问题一样，萦绕在爱好者们的心中。“费马最后定理”有着作为一个数学问题的与众不同的特征，发表了最多的错误的证明。[16]

16 1995 年，怀尔斯（Andrew Wiles）最后利用椭圆曲线证明了费马大定理。论文见 *Annals of Mathematics* 142（1995）：443 ~ 551；553 ~ 572.

第三象限

从小人物

到拿破仑

小人物的故事

在谈牛顿和他后来的时代之前，我们讲几个和牛顿同时的小人物的故事。

181° 罗伯瓦与优先权之争

罗伯瓦（Gilles Persone de Roberval）1602 年出生在法国罗伯瓦（Roberval），1675 年在巴黎去世。他担着罗伯瓦领主的角色，但没有正式的头衔。在那个没有期刊杂志的年代，他的八方通信成了交流数学思想的媒介。他的出名在于他画切线的方法和他发现的高阶平面曲线。托里切利也有过切线思想，于是引发了优先权的争论。罗伯瓦还声称发明了卡瓦列里（Cavalieri）的在微积分出现之前的不可分量的方法，[1] 而且在托里切利之前计算了旋轮线的面积。

1 参见本象限后面故事218。

以上几个优先权的争论很难判定，因为罗伯瓦对公开他的发现向来很迟疑。罗伯瓦迟疑的原因，可以从下面的事实得到解释：从 1643 年起的 40 年里，他一直担任着皇家学院的教授。这个职位每三年选拔一次，通过公开数学竞赛来确定人选，而竞赛题由即将离职的现任者来出。罗伯瓦为了保住职位，隐藏了他的发现，这样，他可以用它们来解决竞赛的难题，而那些竞争者也许只能望题兴叹了。

182° 瓦利斯与无穷大符号

瓦利斯（John Wallis）1616 年出生在英国阿什福德，1703 年在剑桥去世。他是那个时代最能干、最有创造性的数学家。他

是多产而博学的作者，遍及众多的领域。据说，他还最早构想了聋哑人教育体系。1649 年，他被任命为牛津的萨维尔（Savilian）几何学教授，在那个位置干了 54 年，直到去世。他的分析研究为他同时的巨人牛顿铺平了道路。他是英国皇家学会创始人之一，而且在多年里还是政府的密码专家。

瓦利斯在 1655 年的《无穷算术》（*Arithmetica infinitorum*）里最先用符号∞来记无穷大，但到 1713 年伯努利（Jakob Bernoulli）在《预测学》（*Ars conjectandi*）用过以后，那符号才流行开来。这个符号也曾被罗马人用来记数字 1000，也许因为这一点，它才又被用来标记极大极大的数，然后逐渐代表无穷大。

183° 无穷大符号的一个笑话

俗话说数字是不撒谎（lie）的，但这是个例外——它是数字 8 “晃” 倒（lie）在地了。

184° 墨卡托未得的报酬

墨卡托（Nicolaus Mercator）大约 1620 年出生在荷尔斯坦（那时属丹麦），1687 年在巴黎去世。他编辑了欧几里得的《原本》，写了有关三角学、天文学、对数计算和宇宙学的著作。他大多数时间在英国，只在 1683 年去了法国，在那儿设计和建造了凡尔赛的喷泉。但事先约定的酬金却没给他，除非他回归天主教。他拒绝了，不久就在抑郁和贫困中死去。

我们熟悉所谓墨卡托投影的球面地图，其中斜航线（在地球表面与子午线呈固定角度的航海路线）被画成直线。设计这图的不是这位尼古拉·墨卡托，而是杰拉德·墨卡托（Gerard Mercator，1512～1594）。

185° 巴罗：幽默、机智、强壮的男人，慷慨大方的老师

巴罗（Isaac Barrow）1630 年出生于伦敦，1677 年死于剑桥。他在相对短暂的一生里做过许多事情，从某种意义说，可以把他看做他那个时代的埃拉托色尼（Eratosthenes）。他和埃拉托色尼一样，是出色的运动员，更是博学的学者——在数学、希腊文、物理学和神学等多个领域都是出类拔萃的。他也和埃拉托色尼一样，尽管拥有广博的学识，却没能在任何一个分支达到时代的顶点（也许希腊文例外）。他在东欧漫游了几年。1664 年，他当选为剑桥的第一任卢卡斯教授。[2] 有许多好玩儿的故事，讲他的幽默顽皮，他的敏捷机智，他的强健身体，他的雄心壮志，还有他的谨慎尽职。

2 参见《告别数学圈》（A30）。

有故事说，他上小学的时候就喜欢搞恶作剧，有时还把别人惹恼了。一天傍晚，他听见生气的父亲正在祈祷："主啊！如果您哪天需要带走我的一个孩子，我愿意把艾萨克让出来。"

敏捷和机智使巴罗成为查尔斯二世最喜欢的人。鲍尔报道过一件事情，很好说明了巴罗的机敏。巴罗在牧师考试时，有过下面的一场对话：

牧师：Quid est fides?

巴罗：Quod non vides.

牧师：Quid est spes?

巴罗：Magna res.

牧师：Quid est caritas?

巴罗：Magna raritas. [3]

牧师被这位应试者押韵的大不敬的回答惊呆了，对他很失望，还报告了主教大人。幸运的是，主教很有幽默感，巴罗很快成了

3 这段对话原文是拉丁文，很像禅家的答对。大概意思是："何为真理？""你看不见的。""何为希望？""大事。""何为仁慈？""稀有。"

牧师。

尽管巴罗瘦削矮小，面无血色，而且烟瘾很大，但在竞技场上，却像一个强壮的汉子。据说，他能把铁棒打成结，然后又解开；他还是令人吃惊的游泳健将。他漫游东欧时，凭着胆量和果敢，曾从海盗手中夺回了他和其他游客乘坐的轮船。

186° 雷恩爵士和伦敦大火

有时候，人的生命里可能发生一个偶然的事件，让他走出某个预期的领域，而在一个意想不到的领域赢得身后的名声。这样的事情就发生在雷恩爵士（Sir Christopher Wren，1632 ~ 1723）的身上，因为，若非 1666 年的伦敦大火，[4] 他本该成为一名数学家，而不是建筑学家。从 1661 ~ 1673 年，他是牛津的萨维尔天文学教授，还一度是皇家学会会长。他的著作论及物体的碰撞定律、光学问题、流体阻力以及其他数学物理和天体力学的课题。我们还相信他在 1669 年发现了一叶双曲面的两族母线。他第一个（1658 年）阐明了旋轮线的弧长等于生成圆半径的 8 倍。但伦敦大火之后，雷恩的主要精力都投入到圣保罗大教堂的和其他 50 多个教堂以及公众建筑的重建，所以他作为建筑学家的名声远远超过他的数学家的名声。

4 1666 年 9 月 2 日星期日凌晨 1 点左右，伦敦市普丁巷法里诺面包铺失火，然后席卷整个城市，古老的圣保罗大教堂、87 座教区教堂和无数商厦和民房都化为灰烬。幸运的是，只有 8 人（一说 20 人）在大火中丧生，真是奇迹。1712 年，雷恩爵士设计的一座新的圣保罗大教堂落成。

牛顿前后的数学

数学家们发现，在新旧数学之间存在着各种各样的巨大差别。有些人发现主要差别在于学科的内在联系的发展。另一些人发现主要差别在于学科方法的改变。还有些人发现主要差别在于学科观点的改变。

187° 数学，一个新生的大陆

有史以来的数学发展可以看做一个大陆缓慢从海面升起。起初，也许只露出一个孤岛，然后，岛慢慢长大，其他的岛屿也远远近近地浮出海面。大陆继续上升，有些小岛开始通过狭长的陆地连接起来，成对的小岛逐渐成为一个个大岛。最后，大陆成形了，不过还残留着大大小小的湖泊和内海。然后，大陆继续生长，湖海一个个收缩、消失。旧数学像尚未成形的大陆，陆地是不同大小的岛屿组成的。新数学像基本面目越来越清晰的大陆，过去散落的岛屿如今已连成一片。

188° 数学，一块岩石

数学也许是一块巨大的岩石，我们可望了解它内在的组成。过去的数学家就像石匠，拿铁锤和钢凿从外面慢慢打磨石头。后来的数学家像专业的矿工，寻找容易发掘的矿脉，在关键地方打钻，然后填埋好炸药，将岩石炸开。

189° 数学里的有限与无限

旧数学是静态的而新数学是动态的，所以旧数学像是处于摄影的静景阶段，而新数学走进了电影阶段。另外，旧数学之于新数学，犹如解剖学之于生理学，前者研究尸体而后者研究活体。还有，旧数学是与固定和有限联系在一起的，而新数学关心的是变化与无限。

牛顿和莱布尼茨

1642年（也是伽利略去世那年）圣诞节，艾萨克·牛顿出生在英格兰林肯郡格兰瑟姆附近的伍尔索普村（Woolsthorpe）。父亲（在艾萨克出生之前就死了）是个农民，原想孩子也将终身务农。然而，牛顿从小就喜欢设计机械模型，喜欢做实验，显露了高超的技巧。结果，他接受了更多的教育，18岁时进了剑桥三一学院。1665年期间，大学因为淋巴瘟疫的猖獗而关闭了，牛顿呆在家里。就在这个时候，他发展了他的微积分，而且对各种物理问题发生了兴趣，建立了引力论的基本原理。1667年，他回到剑桥，接下来的两年主要都在做光学研究。1669年，他的老师巴罗辞去了卢卡斯教授，让牛顿接任，于是牛顿开始了18年的大学老师生涯。在这期间，牛顿为他伟大的《原理》准备了材料，在朋友哈雷的资助下，《原理》在1687年出版了，而且很快风行整个欧洲。1692年，牛顿得了一场怪病，持续了大约两年，而且使他有点儿精神失常。他生命后期大多献给了化学、炼金术和神学。1696年，他被任命为铸币局总监，1669年升为局长。1703年，他当选为皇家学会会长，从此他连年当选，直到去世。1705年，他被封为爵士。牛顿晚年很不愉快，在和莱布尼茨的争论中，被控告剽窃了微积分的发现。1727年，84岁的牛顿在病痛折磨中去世，葬于维斯敏斯特教堂。死的时候，他满头白发，牙齿只落了一颗。历史见证了他是有史以来最伟大的数学家。

莱布尼茨1646年生于莱比锡，是17世纪的伟大通才，与牛顿竞争微积分的发明。20岁前他就发展了他的“一般特征”

(characteristica generalis) 的最初思想，其中孕育的一般数学，后来开花结果，成为布尔 (George Boole, 1815 ~ 1864) 符号逻辑，更后来，在 1910 年，形成怀特海和罗素的《数学原理》。当莱比锡大学以年轻为借口拒绝授予他法学博士学位时，他来到纽伦堡。他在那儿用历史方法写了一篇精彩的论法律教育的文章，把它献给美因茨的选帝侯。侯爷于是派他去一个负责编订法规的委员会。从此，莱布尼茨的余生都从事外交事务，先为美因茨侯，然后，大约从 1676 年到死，在汉诺威为布伦瑞克公爵。1672 年出使巴黎时，他遇到了正好住在那儿的丹麦大数学家惠更斯。并说服惠更斯给他讲数学。次年，他因政治使命出使伦敦，向皇家学会展示了他发明的计算机。在离开巴黎去担任更优越的布伦瑞克公爵的图书馆长之前，莱布尼茨已经发现了微积分的基本定理，建立了其中的大多数概念，求出了大量的微积分的基本公式。莱布尼茨不仅是老练的数学家，还是杰出的语言学家，赢得过诸如梵文学者的头衔，他的哲学作品也为他在那个领域赢得了崇高的地位。1682 年，他和蒙克 (Otto Mencke) 创办了杂志《教师学报》(*Acta eruditorum*)，任主编。1700 年，他创立了柏林科学院，并努力在德雷斯顿、维也纳和圣彼得堡等地创建同样的科学机构。他的暮年卷入了与牛顿的争论：他是否独立于牛顿发明了微积分。1714 年，莱布尼茨的主人成为第一个英格兰的德国国王，他被遗忘在汉诺威。两年后，1716 年他去世时，参加葬礼的只有他忠实的秘书。

190° 天才的小发明家

牛顿小时候喜欢摆弄五花八门的小玩意儿和机械玩具。他做过水轮、风车、日晷、用水驱动的木钟，还为朋友做过精美的玩

具。他做过玩具磨坊，用小老鼠拉着磨面粉；还做了一个带着灯笼的风筝，在晚上用来吓唬容易上当的村民，他们还以为那个飞动的东西是彗星呢。

191° 天才未必聪明

有个牛顿小时候的故事，说明了天才有时也傻乎乎的。大人让艾萨克去粮仓在门底开一个洞让猫进出，他开了两个洞，大的给老猫，小的给小猫。

192° 小恶棍的驱策

在牛顿的一生里，似乎总需要外在的刺激来激发他的潜能，促使他竭尽全力去完成他的事业，把他的发现告诉公众。关于他的这点个性，有个小故事。牛顿在格兰瑟姆上小学时，开始对功课总是心不在焉，成绩在班级倒数第一。一天，在上学路上，倒数第二的小子踢了牛顿的肚子，不但令他感到身体疼痛，精神也非常痛苦。放学时，牛顿约那小恶棍在教堂外面的空地上打架，把他狠狠地揍了一顿。牛顿还下决心在功课上超过对手，于是用功学习，最后成功了，一点点进步，最后成为学校最拔尖的同学。

193° 走进数学

1661 年，牛顿进入剑桥三一学院。就在这段学习期间，牛顿的心才被引向数学。在第一个十月学期开始时，他正好漫步斯托尔桥博览会（Stourbridge Fair)，买了本占星学的书。因为不知道相关的几何和三角，他看不懂，于是买了本欧几里得《原本》，感觉很容易；接着又买了笛卡儿的《几何》，发现有点儿

难。这些书激发了他的数学兴趣，使他决心认真研究数学而不是化学。他又继续读了奥特雷德的《数学指南》（*Clavis*），开普勒和韦达的书，瓦利斯的《无穷算术》。他从阅读数学走向了创造数学。



剑桥大学的牛顿雕像

194° 牛顿的漫不经心

据说，牛顿经常每天写作十八九个小时，而且有着非凡的全神贯注的能力。一些有趣的故事（可能是假的）说明了他在用心思考时对周围是多么漫不经心。

有故事说，牛顿请朋友吃饭，离开餐桌去拿酒，心有所想，竟忘了要做的事情，他走进卧房，穿上长袍，走到小教堂去了。

另一次，牛顿的朋友斯塔克莱（Stukeley）博士来看他，说好一起吃鸡。牛顿那时在外面，但一盘烧鸡已经盖着摆在餐桌上了。斯塔克莱博士揭开盖子，拿出烧鸡来吃了，然后把骨头放回盘子盖上。过了一会儿，牛顿回来了，招呼朋友一起坐下。他揭开盖子，发现只剩骨头了，说，“亲爱的博士，我忘了我们已经吃过了。”

还有一次，牛顿从格兰瑟姆骑马回家，下马和马一起步行上城边的斯皮特格（Spittlegate）山。马在路上滑倒了，只把缰绳留在主人手里。等到了山顶准备翻身上马时，牛顿才发觉马没了。

195° 牛顿的第一个纯科学实验

牛顿老年时常说，他第一个纯粹的科学实验是16岁时在克伦威尔（Cromwell）去世那天做的。那天，暴风雨席卷英格兰，为了确定风的强度，他在风中跳远，先顺风，然后逆风。把两次跳

远的距离与在平静天气下跳的距离比较，他就得到一个风力的度量。此后，每当风起，他就说它有多少多少英尺的强度。

196° 对牛顿的颂扬

牛顿是高超的实验家和卓绝的分析家。作为数学家，他几乎是世界上有史以来最伟大的一个。他对物理学问题的洞察和他解决它们的数学才能，大概也是前无古人的。我们能看到许多杰出人物对他的伟大的赞誉。例如，莱布尼茨说，“把数学从世界的开始领进他的时代，牛顿做了一大半的工作。”拉格朗日（Lagrange）也说过，牛顿是最伟大的天才，而我们是最幸运的，竟能赶上见证一个世界体系的构建。蒲伯（Alexander Pope，1688～1744）用下面的诗句赞美了牛顿的成就：

> 自然和自然律深藏在黑夜，
> 上帝说，“让牛顿来，”于是光亮了一切。

埃利斯（Havelock Ellis）称牛顿是“盎格鲁撒克逊天才的卓越代表”。高斯对其他伟大的数学家都称 magnus，clarus 或 clarissmus，惟独对牛顿用了前缀 summus。[5]

5 前几个是“大”、“有名”，最后一个代表“最高”。

197° 牛顿的自我评价

与别人的赞誉不同的是牛顿谦逊的自我评价：“我不知道我在世人面前是怎样的人；但对我自己来说，我不过是在海边玩耍的一个孩子，偶尔捡起光滑的卵石和漂亮的贝壳就心满意足了，而真理的海洋依然隐秘地横在我面前。”他还慷慨地赞美了他的前辈，“假如我比别人看得更远一点，那是因为我站在巨人的肩

上。”他不承认自己与别人有什么不同，也许只是多一点儿热情、毅力和警觉。每当被人问起他如何发现时，他回答：“不停地思考。”他曾公开说，如果说他做了什么，那完全是因为勤奋和坚韧的思考：“我总把要思索的问题摆在面前，等待第一缕曙光显现，一点点照亮，直到光焰满天。”

198° 德摩根的文字游戏

实际上，牛顿之前就有人预见了引力的平方反比定律[6]，但牛顿增添了内容，证明了它，从它引出了结果。德摩根曾这样总结牛顿的功绩：“引力的概念不新，但牛顿新。”[7]

199° 牛顿讨厌争论

牛顿的许多发现，如他的光学理论和从光学实验导出的某些结果，遭到了一些科学家的猛烈攻击。牛顿发现，这些引发的争论很快从纯粹的科学探讨沦落为吹毛求疵和鸡毛蒜皮，索然无味，于是他发誓再也不发表任何科学的东西了。他很迷惑，做科学的人竟把科学弄成个人纷争的战场。他厌恶那些争论，几乎到了病态的地步。结果，他几乎所有的发现都在好多年以后才发表，这给数学历史带来了重大影响。推迟发表的后果是，人们怀疑他剽窃了微积分的发现，把他卷入了与莱布尼茨不那么光彩的争吵。正因为这场争吵，把牛顿看做领袖的英国数学家远离了欧洲大陆的数学发展，极大损害了英国的数学，它前进的步伐落后了几乎一百年。

牛顿在1675年12月9日的一封信（与他为捍卫光学理论的大量通信有关）里说，“我的光学理论引发的讨论使我深受其害，我怨自己竟那样鲁莽地离开了我所追求的安宁和幸福。”后

6 宇宙中任意两个粒子之间的吸引力正比于它们质量的乘积，反比于它们之间的距离的平方。（原注）

7 原文是“The notion of gravitation is *not new*, but Newton *went on*.”它的有趣在于 *not new* 是 Newton 字母的重新组合（英文叫 anagram），而 *went on* 又是 *not new* 的回文。

来，1676 年 11 月 18 日，他写道，“我发现自己成了哲学［科学］的奴隶；但假如我不管林纳（Linus）先生的言论［林纳是吹毛求疵的批评者之一］，那么，我除了为自己开心做一点或者让它在我身后发表，就将永远和科学告别了；因为我发现，一个人要么决心不拿出新东西，要么就做捍卫它的奴隶。”《原理》出版以后，牛顿对那些无聊争论的恼怒又暴发了。1688 年 6 月 20 日，他在给哈雷的信中说，“［科学］是一个粗鲁爱吵的妇人，男人要像应对诉讼一样和她相处。我发现了她的真面目，现在又走近她了，而她警告了我。”

200° 挑战的问题

英格兰与欧洲大陆争论牛顿的流数法与莱布尼茨的微分法哪个更成熟，他们根据当时的风俗，提出些挑战性问题来检验两种方法。于是，1696 年 6 月，约翰·伯努利（Johann Bernoulli）和莱布尼茨联合提出两个问题来挑战“世界最精明的数学家”。其中较好的一个问题是：对给定的不同高度且不在一条垂线上的两点，确定它们之间的一条曲线，使粒子在重力作用下以最短的时间从高点（无摩擦）滑到低点。这就是著名的“最速降线”（“最短时间”）问题，结果是一条反向的旋轮线。这个问题和它的相伴问题在竞赛的 6 个月里一直困惑着欧洲的数学家。于是，在莱布尼茨的提议下，竞赛时间再延长一年。于是，有人把两个问题拿给牛顿，牛顿也就是这样第一次听说了问题，那是在 1697 年 1 月 26 日下午 4 点，他刚在造币局忙碌了一天。他明白问题给他是为了检验他的流数方法所宣扬的威力，于是晚饭后就坐下来解题，第二天他将结果匿名传给皇家学会。据说，伯努利一看到结果，马上就说，“啊！我从爪子认出了那头雄狮。”牛顿那令

人难以置信的技巧。证明了他举世无双的数学才能在55岁时还和他从前一样强健。

1716年，牛顿74岁时，又一次证明了他持久的数学活力。莱布尼茨提出一个自以为困难的问题，向欧洲数学家挑战，但无疑针对的是牛顿。问题是求一个单参数曲线族的正交轨迹。和从前一样，牛顿是当天下午从造币局疲惫回家后听说问题的。就在那天傍晚，他就把问题解决了。在整个数学史上，似乎没有第二个人像牛顿那样，能在瞬间将全部的才智聚集到一个艰难的问题。

201° 莱布尼茨的非凡头脑

数学思想有两个主要而对立的领域，连续的和离散的。莱布尼茨是数学史上罕有的具有两种思想的最高品质的人物。



莱布尼茨（1646～1716）

202° 莱布尼茨与宗教

莱布尼茨热衷于各种宏大的宗教计划，然而都没有结果。于是他试着统一新教与天主教，结果又失败了，只统一了那时仅有

的两个新教派别。贝尔曾指出，莱布尼茨忽略了一个宗教法则，它和物理学中的热力学第二定律一样基本，那就是，每个宗教派别都倾向一分为二，然后更多，直到教义比信徒还多。

有时候，莱布尼茨觉得，他可以用他所认为的二进制算术下的上帝的造物图像来把整个世界基督化。因为可以用1来代表上帝，0代表无，他想象上帝从无创造了万物，正如二进制算术中所有数都能通过1和0来表示。这个思想令莱布尼茨欣喜，他将它通报了中国数学会会长［钦天监］耶稣会士闵明我（Jesuit Grimaldi），希望他能让在位的中国皇帝（他对科学特别感兴趣）皈依基督教。[8]

8 康熙皇帝确实对数学和自然科学都很感兴趣。

伯努利家族

有个普遍法则，大概是说，任何一个家族至多只能有一个杰出的数学家，而事实上大多数家族一个也没有。于是，找遍牛顿的祖先、后代和亲戚，也没有第二个大数学家。这个法则也有例外。例如，在美国有两个莱默尔（Lehmer，父与子），两个贝克霍夫（Birkhoff，父与子），还有些夫妻数学家。我们也记得17和18世纪在意大利出生的法国卡西尼（Cassini）家族，也许我们还能想起17世纪英格兰的格里戈利（Gregory，舅舅与外甥），17世纪荷兰的凡斯库顿（Van Schooton）家族和18世纪法国克莱罗（Clairaut）家族。当然，还有生活在古希腊数学暮年的塞翁（Theon）和海帕蒂娅（Hypatia，父亲和女儿）。我们还能想到别的例子。但这些都是相对罕见的。更令人惊奇的是瑞士的伯努利一家，三代人产生了至少8个著名数学家。

203° 伯努利家族

伯努利家族的记录从雅各布（Jakob Bernoulli，1654～1705）和约翰（Johann Bernoulli，1667～1748）兄弟开始。当莱布尼茨的论文在《教师学报》发表时，二人就放弃了职业爱好，成了数学家。他们是最早认识微积分的惊人力量并将其用于各类问题的数学家。雅各布从1687年到去世，一直占据着巴塞尔大学的数学讲席。约翰在1697年成为格罗宁根（Groningen）大学教授，1705年雅各布去世后继任了哥哥的职位，并在那儿度过余生。兄弟俩常常针锋相对，彼此（还包括莱布尼茨）几乎不断在交流着思想。

雅各布的数学贡献包括：极坐标的应用，在直角坐标和极坐标下导出平面曲线的曲率半径公式，将悬链线的研究推广到可变密度的线和有心力作用下的线，其他大量高阶平面曲线的研究，发现等速线（物体在曲线上以均匀速度下落——原来是具有尖点切线的半立方抛物线），确定了一端固定的弹性杆在另一端承载重物时的形态，确定了两对边固定在同一水平高度的方形柔性薄膜在中央承载液体时所具有的形态，确定了方形船帆在满风时的形态。他还提出并讨论了等周曲线问题（一定类型的具有固定周长的曲线在平面包围最大的面积），因而是最早运用变分法的数学家之一。他也是最早的一批概率论学生，他在这个领域的著作《预测学》是死后在1713年出版的。

今天的数学有几个概念联系着雅各布的名字，如概率统计理论中的伯努利分布和伯努利定理，同学们在微分方程第一课里遇到的伯努利方程，具有数论意义的伯努利数和伯努利多项式，还有在任何微积分入门课程里出现的伯努利双纽线。在雅各布关于

等时线问题的解（1690 年发表于《教师学报》）中，我们第一次看到了微积分意义的“积分”（integral）一词。莱布尼茨称积分计算为 *caculus summatorius*；1696 年，莱布尼茨和约翰赞同称它为 *caculus integralis*。

约翰对数学的贡献比哥哥雅各布更多。尽管他任性而且好忌妒，但还是当时最成功的老师之一。他极大丰富了微积分的内容，为了让这门新学科在欧洲大陆流行，他产生了重大的影响。

约翰的著作涉及了广泛的题目，包括与反射和折射相关的光学现象，曲线族的正交轨迹，用级数求曲线长和曲面面积，解析三角法，指数计算，等等。他更突出的一篇作品是对最速降线问题的解决——即在两点之间求一曲线，使重力作用下的粒子沿曲线下落最快。结果是适当形式的旋轮线。雅各布也讨论过这个问题。旋轮线也是等时线问题的解——不论粒子从曲线哪一点出发，它沿曲线到达一定点的时间都一样。后面这个问题，约翰、欧拉和拉格朗日进行了更一般的讨论，而它早已被惠更斯（1673）和牛顿（1687）解决了，还被惠更斯用于摆钟的构造。

约翰有三个儿子，尼古拉（Nicolaus，1695 ~ 1736），丹尼尔（Daniel，1700 ~ 1782）和小约翰（Johann II，1710 ~ 1790），都是 18 世纪知名的数学家和科学家。尼古拉在数学领域很有希望，被召到圣彼得堡研究院，不幸的是才过 8 个月就死了。他的著作讨论了曲线、微分方程和概率论。他从圣彼得堡提出的一个概率问题，后来成为著名的彼得堡悖论。问题是：扔硬币时，如果第一次出现正面朝上，某人得 1 分；第二次才出现正面朝上，得 2 分；第三次才出现正面朝上，得 4 分；依此类推，那么，那人的期望值是多少？数学理论表明，他的期望值为无穷大，这似乎是一个荒唐的结果。

弟弟丹尼尔接替哥哥来到圣彼得堡，讨论了那个悖论问题。7 年后他回到巴塞尔。他是约翰三个儿子中最有名的一个，多数精力都投入到了概率论、天文学、物理学和流体力学。在概率论中，他提出了“或然率期望”（moral expectation）的概念，在 1738 年出版的《流体力学》（*Hydrodynamica*）中，出现了今天所有基础物理学课本里的那个以他的名字命名的原理。他写过潮汐，建立了气体分子运动论，研究了振动弦，开了偏微分方程的先河。他至少获过 10 次法兰西科学院奖。

小约翰是约翰最小的儿子，原来学法律，1743 年继父亲之后成为巴塞尔大学数学教授。他特别感兴趣的是热和光的数学理论。他三次荣获法兰西科学院奖。

18 世纪还有一个尼古拉·伯努利（1687～1759），是雅各布和约翰的侄儿，也留下了一定的数学名声。有段时间，这位尼古拉在帕多瓦担任伽利略曾经担任过的数学教授。他的作品广泛讨论了几何、微分方程、无穷级数和概率论的问题，晚年教逻辑和法律。

小约翰也有三个儿子：小小约翰（Johann III，1744～1807），小丹尼尔（Daniel II，1751～1834）和小雅各布（Jakob II，1759～1789）。小小约翰和父亲一样，先学法律，后来成了数学家。刚 19 岁，他就被聘为柏林科学院数学教授。他的作品论及天文学、概率论、循环小数和不定方程。小雅各布也是先学法律，后来是彼得堡科学院数学教授。他的作品源于他那叔叔兼老师的丹尼尔。

伯努利后代中不那么重要的是小丹尼尔、小丹尼尔之子克里斯多夫（Christoph，1782～1863）和克里斯多夫之子古斯塔夫（Johann Gustav，1811～1863）。

伯努利家族的谱系图可以归纳如下：

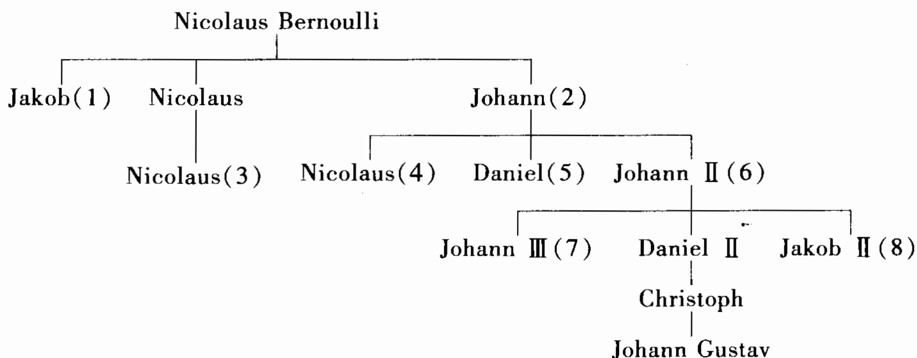


图 27

204° 长子的尴尬

有些人相信，夫妇的第一个儿子从父母那儿继承了最多的才智。关于这一点，我们有趣地看到，雅各布是父母的第五个儿子，而约翰是第十个。

205° *Eadem mutate resurgo*

雅各布惊讶地发现，等角（或对数）螺线 $r=a^{\theta}$ 以奇异的方式在其渐开线、渐屈线和反射和折射的焦散线中重复自身。他追随阿基米德，表示希望将这种曲线刻在他的墓碑上，并刻写 *Eadem mutate resurgo*（“纵然改变，我重生如故。”）——这是一个表达基督希望的典故。在巴塞尔的回廊，游人还可以看到石匠为了实现雅各布的愿望而做的草图。

206° *Invito patre sidera verso*

和许多父亲一样，雅各布的父亲也曾强迫他从事不喜欢的职



业。他想雅各布做神学家，想方设法地反对年轻人的天文学和数学兴趣。这促使雅各布自己选择了做那位驾驶太阳车的阿波罗的儿子（Phaethon），还说了句“格言”：*Invito patre sidera verso*（“我违抗父命，研究星辰。”）

207° 约翰的忌妒

约翰比哥哥雅各布小十三岁，可能因为雅各布的优越感令约翰产生忌妒和怨恨。总的说来，兄弟俩长期不和。约翰在别人不能理解他自认为的优点时，行为常常出格。于是，在绝望中，他曾把自己的一个错误解法偷换成雅各布提出的正确解法。他还忌妒地把儿子丹尼尔赶出家门，因为儿子赢得了法兰西科学院的奖金，而他自己想得却没能得到。

208° 洛必达法则

［下面的文字，经允许引自斯特洛伊克（D. J. Struik）教授[9]为《数学教师》杂志“历史讲述”专栏写的同名文章，发表于1963年4月号，257～260页。］

所谓洛必达法则说，当$f(a)=g(a)=0, g'(a)\neq 0$时，

$$\lim f(x)/g(x)=f'(a)/g'(a)$$

它最先由法国数学家洛必达（G. F. A. de l'Hopital 或 De Lhospital）发表于他的《无穷小分析》（*Analyse des infiniment petis*, Paris, 1696）。洛必达侯爵是业余数学家，很早就对莱布尼茨的两篇短文（一篇在1684年，另一篇在1686年）介绍的新兴的微积分发生了浓厚的兴趣。他不太相信凭他个人的本领能掌握那么新的激动人心的数学分支，于是，在1691和1692年间的几个月里，他把瑞士杰出的青年物理学家和数学家约翰·伯努利请到他在巴黎

9 斯氏是著名的数学史家，以后还有许多他讲的故事。



的家中，后来又到了他自己的城堡。伯努利离开他回家乡巴塞尔后，侯爵还一直和他的这位导师保持通信，并同时发表了一些他本人发现的独创性结果。1696 年，洛必达的书出版了，对莱布尼茨和伯努利表达了谢意，不过话说得很一般："我冒昧采纳了他们的发现，他们随时可以声明是他们本人的，我乐意奉还。"

至于洛必达有多少依赖于伯努利，这个问题还没有答案，而且在那些年还多少有点儿神秘。伯努利在收到洛必达寄来的书后，大方地表示了感谢和夸奖。但是后来，在伯努利在侯爵在世期间写的一些私人通信里，声称《无穷小分析》的许多内容都是他的东西。1704 年，洛必达去世后，伯努利公开宣布包含 0/0 法则的第 163 节是他的结果。从那时起，对这类优先权争论感兴趣的数学家，就在哲学的高度讨论洛必达是否真的抄袭了伯努利。他们认同伯努利作为数学家的伟大，同样也承认他为人的渺小。直到最近也没有一个能让大家都接受的结论。

1922 年，伯努利在 1691 和 1692 年间的微分手稿发表了（相应的积分手稿是从约翰·伯努利 1742 年发表的《几何计算》(*Opera*) 知道的，那时作者还在世呢)，事情清楚了好多。拿伯努利的文字与洛必达的书来对照，我们发现有许多内容是重复的，看来伯努利确实激发了高贵的侯爵的智慧灵感。但到了 1955 年发表伯努利的早年通信，真实的情形才显露出来。原来，1694 年，侯爵和他的老师之间有过一笔交易，洛必达愿意给他一年 300 里弗，只要伯努利答应下面三个条件：

1 解答侯爵给他提出的所有数学问题；

2 告诉他所有的发现；

3 给洛必达的文字不得转给第三者。

这就解决了优先权问题。下面就是包含这个不寻常交易的那

封信的一段，洛必达1694年3月17日从巴黎寄给巴塞尔的伯努利：

> 我将愉快地为您提供每年300里弗的补助金，从本年一月一日开始。我还付您上半年寄给我的杂志费200里弗，下半年150里弗，以后也照此办理。我答应尽快提高补助，因为我知道它不算太多，等我的麻烦事情了结后，马上就做……我不能老是问个不停，我希望您能偶尔给我一点时间，研究我给您的问题——然后把您的发现告诉我，条件是不能告诉别人。我还要求您不要把给我的信件复本寄给瓦里格农（M. Varignon）或其他人，我不愿看到把它们公开出来。告诉我您的决定，您的奴仆。
>
> L·M·洛必达

我们没找到伯努利的回信，不过从1694年7月22日的信来看，我们知道他接受了条件。那时这位青年科学家一文不名，刚结了婚，还在四处找工作（第二年得到了荷兰格罗宁根大学的一个职位），那对他来说真算得一笔横财了。两人的有趣关系持续了多久，我们不知道，但伯努利的经济状况好转了，而洛必达的条件却没有变得更好。到1695年时，那关系可能就终止了。

伯努利给这位赞助者回答问题的几封信现在都发表了，其中1694年7月22日的那封包含了0/0法则。公式很像我们在《无穷小分析》里看到的。伯努利举的例子也几乎和洛必达用的一样。

情况现在清楚了。洛必达的书出版时，伯努利囿于承诺，没有指出属于他的那些章节。他只能在私下表达意见。后来，侯爵

死后，他觉得不能再保持沉默，于是声称书中最精彩的结果（0/0 法则）是他的。但他拿不出证明。今天，我们还他清白了。

209° 丹尼尔的两次经历

赫顿（Charles Hutton）博士在《哲学和数学词典》第一卷（伦敦，1815）里记录了丹尼尔的两个小故事，并且说明，丹尼尔声称那两次经历比他一生获得的任何荣誉更令他快乐。

一天，丹尼尔和一个有学问的陌生人走在一起，谈笑风生。那人问他的名字，他刻意谦恭地回答，"我是丹尼尔·伯努利。"那人以为他在开玩笑呢，说："那我是艾萨克·牛顿。"

还有一次，丹尼尔邀请瑞士著名数学家柯尼格（Samuel Koenig，1712～1757）共进晚餐。席间，柯里格有点儿自我陶醉，大讲他费了好大气力解决的一道难题。丹尼尔一直客客气气听着。等两人喝咖啡时，他给了柯里格一个解法，比他原来的优美得多。

210° 不和的种子

［下面的文字，经允许引自路易维尔（Louisville）大学教授菲利普（J. P. Phillips）的文章"最速降线、等时线、旋轮线——不和的种子"，发表于《数学教师》杂志"历史记述"专栏，1967 年 5 月，506～508 页。］

在平面滚动的轮子边缘的一点的运动轨迹就是旋轮线（图 28），也根据其力学性质称之为最速降线和等时线，还被某个数学史家描述为不和的种子，被别人说成是几何学里的海伦（Helen）——虽然美丽，却是纷争之源。[10]

10 就是引起特洛伊战争的那个海伦。

旋轮线从发现那一刻起就引出纷争，其实发现本身就众说纷

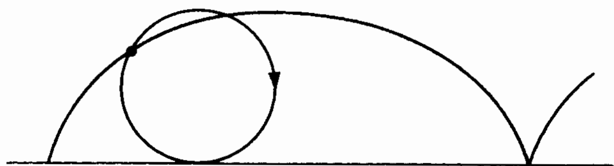


图 28

纭。多数文献（但不是全部）认为希腊人还不知道它。17 世纪的瓦利斯把他归功于 15 世纪的古萨的尼古拉，但是错了。布维勒（Charles Bouvelles）在 1501 年写的书中就肯定描述过旋轮线，他也通常被认为是真正的发现者。

17 世纪科学革命最伟大的数学家们几乎都被旋轮线的奇异特征所困扰。研究过它的人包括伽利略、帕斯卡、罗伯瓦、托里切利（有人说他剽窃了旋轮线的面积计算，据说他因此抑郁而死）、笛卡儿、费马、雷恩、惠更斯、约翰·伯努利、莱布尼茨和牛顿。科学革命的明星几乎都走到一起来了，他们对旋轮线的共同兴趣还需要解释。在这个问题上，每发现一个新的性质，他们都会为优先权争论不休，构成了一个有趣的心理学问题。

17 世纪的人们对机械和运动的数学有着强烈的兴趣，这也很好说明了为什么旋轮线在那时显得那么重要。关于旋轮线的许多东西是通过微积分方法获得的，而那时微积分还没正式诞生，于是不同数学家之间难免存在一些方法的混乱。

伽利略是第一个关心旋轮线的伟人。大约在 1599 年，他用实验确定了旋轮线包围的面积接近产生它的圆的面积的三倍，这也许可以说体现了真正的阿基米德精神。他接着指出旋轮线的弧形很适合用来建造桥梁。后来真出现了这样的桥。下面我们将看到，伽利略还把旋轮线传给了学生托里切利和维维亚尼（Viviani）。

17 世纪 30 年代，法国几何学家罗伯瓦用数学证明了旋轮线

包围的面积恰好等于圆面积的3倍，但令他痛苦的是，笛卡儿攻击他为了那样一个小结果竟然费了那么大的力气。在反驳笛卡儿的更简单的证明时，罗伯瓦指出，他先知道了人家发现的答案，问题当然会简单。面对侮辱，笛卡儿找出了旋轮线的切线，并要罗伯瓦和费马自己去得出结果。费马得到了，罗伯瓦没有，或者根本不能。

因为罗伯瓦的结果当时没有发表，而托里切利几乎肯定也独立得到了面积结果，于是在后来的几年里，他卷入了与托里切利的优先权之争。罗伯瓦指责托里切利剽窃，而托里切利不久就死了，人们过分浪漫的想象当然就将他的死归结为对那些指责的绝望。伽利略的另一个意大利学生维维亚尼也独立发现了切线。

旋轮线几何的系统研究始于帕斯卡。有故事说，一天晚上，帕斯卡牙疼，其他地方也疼，就开始想旋轮线问题，想的时候疼痛也减轻了。尽管已经离开数学成为宗教神秘主义者，但帕斯卡把这看做上帝要他完成的最后的数学搏击。经过8天的思考，他发现了与底边平行的两条直线之间的截面面积、绕轴或底边旋转所形成几何体的体积以及那些几何体的重心等多个结果。为完成这些结果，需要计算几个三角函数积分，那是以前从来没人算过的，当然那时(1658年）也没人意识到它是微积分的一部分。

帕斯卡向欧洲的数学家提出了挑战：证明那些问题。但他只收到了两个正式回答，可惜都不够好，不能获奖。一个回答来自瓦利斯，后来他修正了其中的大量错误并发表出来。惠更斯、雷恩和费马则非正式地解决了部分问题，而惠更斯接着走向了新的不同的领域。

惠更斯对旋轮线的最大兴趣从数学性质转向了力学性质。在纯数学方面，惠更斯发现旋轮线的渐屈线是一条相同的旋轮线

（图 29），但他似乎更关心应用他的另一个发现：旋轮线是等时

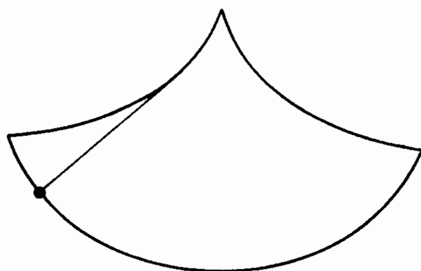


图 29

线。就是说，在反转的旋轮线上，重力作用下自由加速的物体，不论从哪一点起步，到达最低点都需要相同的时间。然而，他提出的用旋轮线运动来做摆钟（他发明的）的建议，似乎引出了好多力学上的困难。

旋轮线的最著名发现是在 1696 年。那年，约翰·伯努利要确定一个路径方程，使粒子从路径的一点落向另一点的时间最短。这是变分法的第一次正式运用，而它额外的意义在于，伯努利发现可以用它来解决牛顿和莱布尼茨之间关于微积分发明的纠纷。在通信中，莱布尼茨和伯努利一致认为，在欧洲除了他们而外只有几个数学家也许能发现问题的解——最速降线（即旋轮线）——而能发现解的人应该是完全把握了微积分的人。问题及时向数学家们提出来了。

有个著名的故事（但缺乏依据）说，[11] 牛顿在造币局劳累一天后，收到了问题的邮件，在第二天早晨之前就把它解决了。他的解匿名发表于《皇家学会哲学会刊》，令莱布尼茨和伯努利大为失望。

11 参见前面的故事 200。

遗憾的是，这个事件只是激起了牛顿的异常情绪，怀疑有人要剥夺他的成绩，于是在接下来的几年里，他想方设法损坏莱布

尼茨对微积分的发言权。整个过程都大失风度，而且动摇了欧洲数学的整个未来。

初识微积分

17 世纪有许多重大的数学发现，也给数学的发展带来了丰硕的成果，而其中最重要的无疑是牛顿和莱布尼茨在世纪末创立的微积分。这个新的工具发挥了神奇的威力，在人们的惊奇中成功解决了大量在过去令人困惑而一筹莫展的难题。它的方法适用于广泛的领域，如曲线的长度、任意曲线包围的平面面积、不同形状固体的表面积和体积、复杂的极大极小问题、涉及速率改变的各种问题、切线和法线的几何方程、渐近线、包络线、曲率、关于功、能量、功率、压力、重心、惯性和引力的物理学问题。具有如此神奇的适用性的新工具自然吸引了当时的数学研究者，论文也像洪水涌来，但似乎都不关心它那并不能令人满意的基础。毕竟，它们的应用过程已经向研究者证明了它们的成功，谁还愿意去检验它的逻辑基础呢？

211° 牛顿的假设转移

尽管在牛顿和莱布尼茨发明微积分后的近百年里，几乎没有人做过严格的研究来巩固那日益高大的超级建筑，但也不能说就没有人出来批评它的薄弱基础。一些数学家之间展开了马拉松式的争论，就连两位创立者也不满意他们对这门学科的基本概念的解说。对基础缺陷最中要害的批评来自非专业的数学家、著名形而上学家贝克莱大主教（Bishop George Berkeley）。他主张，微积分发展的逻辑谬误在于假设的转移。为说明这个特别的批评，我

们考虑牛顿的一个方法，即今天所谓的微分。

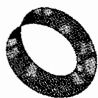
在1704年的《曲线积分》（*Quadrature of Curves*）里，牛顿像下面那样确定了x^3的导数（或如他所说，流数）。我们重述他的方法：

> 给x一个增量，成为$x+o$，同时，x^3成为$(x+o)^3$，或
>
> $x^3+3x^2o+3xo^2+o^3$
>
> 而对应的增量
>
> o和$3x^2o+3xo^2+o^3$
>
> 之比，犹如
>
> 1比$3x^2+3xo+o^2$
>
> 现在令增量为零，则最后之比为1比$3x^2$，从而x^3相对于x的变化率为$3x^2$。

贝克莱所批判的假设转移是显而易见的：部分论证中，假定o不为零，而在别的论证中，又假定它为零。有人回应了贝克莱的批评，但那时没有严格的极限处理方法，不可能完全解决这个问题。别的方法也同样混乱。实际上，那时的微积分过程的解释都很模糊，疑云重重，读来费解。

212° 消失量的幽灵

贝克莱在《分析家》（*The Analyst*）第35节里对流数（即我们今天说的导数）发表了如下意见："这些流数是什么呢？渐趋于零的速度增量。那些同样渐趋于零的增量又是什么呢？它们既非有限量，亦非无穷小量，也不是无。难道我们不能称它为消失量的幽灵吗？"



213° 面对异端数学家

贝克莱的《分析家》成了具有高度价值的对牛顿微积分的批评，而它本来是为了回应公然宣称自己是无神论者的“异端数学家”哈雷（Edmund Halley, 1656～1742）。当时，贝克莱的一个朋友正卧病在床，但拒绝精神安慰，因为那位伟大的数学家哈雷已使他相信基督的说教是不可信的。这件事情促使贝克莱写《分析家》来向那个“异端数学家”证明流数的原理并不比基督教更清楚。在第7节，贝克莱说，“如果谁能消化一个二阶或三阶流数，一个二阶或三阶差分，那么在我看来，他也不会为神性感到惊谔了。”

214° 伯努利“原理”

微积分的某些早期解释近乎神秘和荒谬，像约翰·伯努利说的，“一个增大或减小无限小的量既不增大也不减小。”

215° 格兰迪的神秘主义

多年以来，微积分的整个基础问题是一个争论的主题，而所有问题都和无限的过程相关。在微积分建立的神秘时期，往往祈求于学科之外的更神秘的东西。于是，牧师格兰迪（Luigi Guido Grandi, 1671～1742，他在比萨大学先做哲学教授然后又做数学教授，写过大量几何学著作）考虑了交错级数：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

如果我们要确定总和的值 S，它该是多少呢？以某种方式将其中的项分组，我们得

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

$$= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

而以另一种方式分组，我们得

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots$$
$$= 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

面对这两种可能，有些数学家主张，因为 0 和 1 都是同样可能的结果，所以正确的级数和为 1/2。当然，这个值也可以通过纯粹的公式形式得到。因为

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$$

所以 $2S = 1$，即 $S = 1/2$。格兰迪也相信级数和应该是 1/2。为了支持这个结论，他还打比方说，一个父亲把一颗宝石传给两个儿子，条件是他们一人保存一年，因此它属于每个儿子的时间都是一半。格兰迪进一步提出，公式

$$1/2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$
$$= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$
$$= 0 + 0 + 0 + \cdots$$

意味着世界是从虚无创生出来的。

216° 欧拉的形式主义

如果我们对一个数学运算的理论一知半解，就有盲目甚至毫无逻辑地运用公式的危险。如果不明白运算的可能局限，运算者很可能把公式用到不该用的地方。微积分创立以来的一个世纪里，数学分析几乎就发生着这样的事情。数学家们沉迷于那门学科的巨大威力，却没有真正懂得它应有的基础，几乎像瞎子一样进行着他们的分析过程，常常是凭可怜的直觉的引导来感觉它可能的有效性。这样，荒唐的结果必然越来越多，谨慎的数学家开始反感盲目的直觉和形式的计算，决心担负起为微积分建立严格

基础的艰巨使命。

瑞士伟大数学家欧拉（1707～1783）的工作是18世纪数学分析的形式计算的典型代表。欧拉凭着纯粹的形式方法发现了著名的公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

当 $x = \pi$ 时，有

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

把数学中最重要的5个数字联系起来了。通过形式运算，欧拉得到了大量奇怪的关系，如

$$i\log_e i = -(\pi/2)$$

并成功证明了任何非零实数 n 都有无限多个对数（对给定的底），若 $n<0$，它们都是虚数；若 $n>0$，则只有一个不是虚数。高等微积分里的 β 函数和 γ 函数、数学分析里的许多其他课题，同样也都是欧拉发现的。欧拉写了大量数学论著，他的名字几乎关联着数学的每一个分支。

凭着非凡的数学直觉，欧拉通常都走在正确的道路上。不过，还是有很多时候，形式的计算将他引向了荒谬。例如，将二项式定理形式地用于 $(1-2)^{-1}$，我们发现

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

这个结果居然没令他感觉惊奇！还有，欧拉将两个级数

$$x + x^2 + \cdots = x/(1-x) \text{ 与 } 1 + 1/x + 1/x^2 + \cdots = x/(x-1)$$

加起来,发现

$$\cdots 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + \cdots = 0$$

217° 达朗贝尔

第一个对数学分析的薄弱基础提出真正修补的是达朗贝尔

（Jean-le-Rond d'Alembert，1717～1783），他在1754年非常正确地发现它需要一个极限的理论。然而，那样一个健全的理论，直到1821年伟大的法国数学家柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789～1857）迎接了挑战并大获全胜才建立起来。

24岁时，达朗贝尔进入法兰西学院。1743年，基于如今以他的名字命名的运动学原理，他发表了《动力学》（*Traité de dynamique*）。在1744年的一篇论文里，他将那个原理用于流体的平衡和运动，在1746年的论文里，又用于风的起源。这两篇论文，以及1747年的一篇关于振动弦的论文，将他引向了偏微分方程，成为研究这些方程的先驱。利用他的原理，他完全解决了困惑人们多年的岁差问题。1754年，达朗贝尔成为法兰西学院永久秘书。晚年，他参与了狄德罗（Denis Diderot）和他本人发起的法国《大百科全书》的工作。

但是，在数学史上，除了科学贡献之外，达朗贝尔的名字还关联着特别的人文价值。1717年11月16日那个狂风大作的黑夜，一个宪兵在巴黎夜巡时，听到一个婴儿的痛苦哭叫。他向着声音走去，发现一个刚出生的婴儿被遗弃在圣·让勒龙（Saint Jean-le-Rond）教堂的台阶上。宪兵把他带给教区的委员，他在匆忙中就以孩子的遗弃地的名字给他做了教名，在附近找了一对老实的玻璃工夫妇，把他养大成人。后来，不知什么原因，他的名字里加了达朗贝尔。

达朗贝尔的母亲德唐珊夫人（Madame de Tencin）是一个枢机主教的妹妹，因为贪得无厌的野心和对宗教仪式的狂热，把孩子当累赘和祸根。父亲德斯塔切斯（Destouches）将军为人粗枝大叶，很容易受专横的夫人的摆布。看到母亲不承认儿子，父亲很心痛，想方设法帮助可怜的孩子。他给了养父母一笔钱，在小

孩遗弃9年后，他在去世前留下了足够的财产，能让孩子接受良好的教育。

达朗贝尔的一生表现了非凡的才能，性格却不太好。他的才能令他不朽，而他的性格缺陷给他带来了好多痛苦和失败。人生的道理是，尽管才智也许能赢得未来世界，但现实世界还要靠性格来争取。

达朗贝尔有句常被人引用的名言（也应该在初等代数的课堂上引用）：“代数很慷慨，她给的总是比你要的多。”

卡瓦列里，吉田光由，关孝和

218° 卡瓦列里的不可分量

卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri）1598年出生在米兰，在伽利略门下学习，从1629年到1647年去世，一直为波洛尼亚大学教授。他是当时影响最大的数学家之一，写过大量关于数学、光学和天文学的著作。主要因为他的作用，对数很早就引进了意大利。不过他最伟大的贡献在于1635年发表的一篇关于不可分量方法的论文——那种方法也许可以追溯到德莫克利特。[12]

12 德莫克利特的原子论可能与这种无限分割的几何过程有关。

卡瓦列里的论文冗长而模糊，很难明白“不可分量”到底说的是什么。似乎一块平面的不可分量是它的弦，而一个固体的不可分量是它的平面截面。他认为一块平面由无限多的平行弦构成，而一个立体由无限多的平行截面构成。接着，卡瓦列里指出，假如沿平面的轴滑动它平行的每根弦，则弦的端点形成一个连续的边界，如此形成的新平面的面积等于原来平面的面积。同样，滑动立体的截面，将形成一个与原立体体积相同的新立体。这些结果导致所谓卡瓦列里原理：（1）如果两块平面界于一对

平行底边之间，而且任一与底平行的直线在两个平面内的线段有相等长度，则两平面的面积相等；（2）如果两个立体界于一对平行底面之间，而且任一与底平行的平面在两个立体的截面有相等面积，则两立体的体积相等。[13]

13 南北朝的祖暅（公元5～6世纪，祖冲之之子）曾提出："幂势既同，则积不容异。"这里的"幂"指立体水平截面的面积，"势"指高。因此，卡瓦列里原理就是我们的"祖暅原理"。

卡瓦列里原理是面积和体积计算的有效工具，很容易严格确立。为说明这个原理，我们考虑下面的例子，计算球体的体积。如图30，左边是一个半径为r的半球，右边是半径和高为r的圆柱，其中挖去了一个顶在柱底圆心而底为圆柱顶面的圆锥。半球和挖缺的圆柱在同一平面上。现在，我们在距离底面h用一个平行于底面的平面切过这两个立体。这个平面在半圆切出一个圆，在柱体切出一个环。从初等的几何容易看到，两个截面的面积都等于$\pi(r^2-h^2)$。于是，根据卡瓦列里原理，两个立体具有相同的体积。因此球体的体积V为

$$V=2(\text{圆柱体积}-\text{圆锥体积})$$
$$=2(\pi r^3-\pi r^3/3)=4\pi r^3/3$$

卡瓦列里原理的假定和和谐的运用，简化了高中立体几何里遇到的许多公式的推导。无数课本都用它来写，大大发挥了它的教学作用。

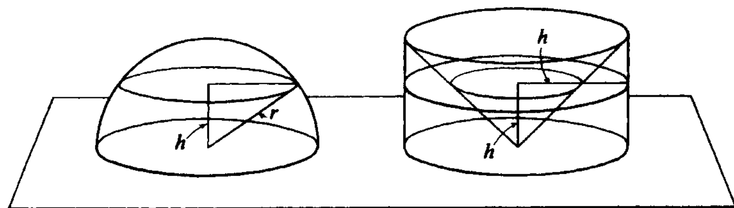


图30

219° 卡瓦列里原理的应用

感兴趣的读者也许愿意试试下面的问题。

（1）做一个多面体，用它作为参考立体，根据卡瓦列里原理求半径为 r 的球体的体积。[令 AB 和 CD 为空间两个线段，使①$AB = CD = 2r\sqrt{\pi}$，②AB 和 CD 垂直于连接它们中点的直线，③AB 垂直于 CD。这样的四面体可以作为参照多面体。]

（2）斜着通过直圆柱底面圆心的平面从柱体切下一个圆柱楔形体（叫“蹄形”）。用卡瓦列里原理，以圆柱底的半径 r 和蹄形高 h 来计算蹄形的体积。[用通过圆柱体的轴的平面 m 将蹄形分为相等的两个部分，令 A 为蹄形的三角形截面的面积。构造一个以面积为 A 的正方形为底的棱柱，其底在平面 m 而高等于圆柱半径 r。从棱柱切出一个锥体，底为不在面 m 的底，顶在另一底面。蹄形的体积为 $2hr^2/3$。]

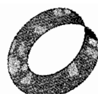
（3）用卡瓦列里原理求“球环”（从球体挖出一个与球的两极同轴的圆柱形洞）的体积。[以直径等于球环高度 h 的球为参照体。]

（4）证明相同高度的所有球环有相同体积，而不论球的半径是多少。

220°“*a*”“*i*”之差

书写的历史常常有以讹传讹的事情。某个历史学家记录一句错话或传言，后来的历史学家仰仗前人的作品，会沿袭同样的错误。在相当长的时期里，许多这样的错误曾广为流传。

在数学史上，一个错误传言的例子是有关意大利数学家卡瓦列里的，他的不可分量方法是积分计算的先行。在许多重要的百科全书、历史和参考书里，都说卡瓦列里是个耶稣会士（Jesuit）。现在知道的真相是，卡瓦列里不是耶稣会士，而是“杰瓦会”（Jesuat）的成员。



所谓杰瓦会（Jesuat）的宗教团体，和耶稣会士风马牛不相及，原是锡耶纳（Siena）的神圣的克伦比尼（Blessed John Colombini）在14世纪创立的，1367年经教皇阿尔班五世批准。这个组织原先的工作是照顾病人——特别是那些患了猖獗一时的黑死病的人——和埋葬死人。后来，杰瓦会解散了，1606年又有人想恢复它。几年后，15岁的卡瓦列里被接受为会员。

后来，杰瓦会的作为有失检点，结果到今天已经不存在了。也许因为它做酒和卖酒，显然违背了教规，而且人数越来越少，于是在1668年，教皇克莱门特九世（Clement IX）将它废除了。

221° “算术”的同义词

吉田光由（Yoshida Koyu）是17世纪日本数学家，他的《尘劫记》（*Jinkō-ki*）是日本第一部伟大的算术著作。书名意思是“小数、大数、论文”，就是说，它是一篇关于不同大小的数的论著。有趣的是，书名在日本家喻户晓，常被当做“算术”的同义词。这令我们想起，在欧洲早期，algorismus（Al-Khowarizmi的讹传）是“arithmetic”的同义词，而欧几里得的名字是几何的同义词。

222° 日本牛顿

17世纪，日本唤醒了智慧潜能，有趣的是，她的数学进步有点儿像几乎同时期的欧洲。于是，在1660到1670年间，日本独立发展了多少有点儿像卡瓦列里方法的积分法，接着又产生了*yenri*，即圆周原理，导致了一种质朴的微积分，与牛顿和莱布尼茨的发明异曲同工。

17世纪最杰出的日本数学家是关孝和（Seki Kōwa，1642～

1708），生在一个武士家庭，从小就显示了数学天赋。从一些证据看，关孝和被誉为日本的牛顿。他和牛顿同年出生，也和牛顿一样，通过自学掌握大部分知识，不但喜欢数学，也精于机械，还是解题能手。两人更大的相似却在于关孝和是圆周原理的创立者。于是，正如牛顿发明了西方的微积分，关孝和发明了东方的微积分。两样微积分都有待后来数学家的改进和发展。牛顿身前荣耀，被封爵士；关孝和死后才获得皇家的封赏，1907 年，天皇追赠他日本学者的最高荣誉。更有趣的是，关孝和比莱布尼茨早 10 年就发现了联立线性方程组的行列式。

223° 天才关孝和

今天还流传着很多关于关孝和小时候的数学天才的故事。一个故事说，他 5 岁时就当面指出长辈的数学错误，大人们对他的数学才能非常惊讶，于是叫他“神童”。1794 年在东京竖立的关孝和塑像，就以这为标题。

另一个故事说，他 9 岁时看见仆人在学吉田光由的《尘劫记》。当仆人对书中的某个问题发懵时，他告诉了他正确的答案。

224° 关孝和和他的雇主

关孝和晚年在甲州担任幕府将军的会计师，就像牛顿给安妮女王（Queen Anne）做造币局长一样。他在领主手下做事，流传着一些故事。其中一个说，有一次，他为主人的事情出门。他坐在轿子上，一路观光，关注沿途的方向、路程、景物、高度和洞穴，然后根据这些观察画了张详细而精确的地图，主人称赞说，“尽管他像武士出游，却像地理学家一样观察。”

另一个故事说，主人决定把一大节熏香木平分给他的家人，

可怎么也不能把它分成相等的几部分。最后请关孝和帮忙，很容易就把难题解决了。

还有故事说，中国皇帝送给主人一台精美的时钟，到点时，有个小人儿出来敲钟。几年后,时钟的机械坏了,小人儿不敲钟了。当地最能干的工匠都招来修钟,但无济于事。关孝和听说后，自告奋勇把钟带回家,很快就将完好如初的时钟送还给了主人。

17 和 18 世纪的英国小数学家

225° 成功的阶梯

甘特（Edmund Gunter，1581 ~ 1626）是布里格斯的同事，1620 年发表了以弧分为间隔的角度的正弦和正切的 7 位常用对数表。他还在 1620 年制作了对数尺，即数字刻度之间的距离正比于数字的对数。用对数尺做乘除运算，可以借助两个圆规，化为线段的加减。甘特就这样开了现代计算尺的先河。也是甘特发明了名词余弦和余切，他还因为他的“甘特链”而出名。

作为基督教堂的神学家的甘特，也有一个有趣的故事。显然，他是个很拙劣的传教士，那是一段不幸的经历。他被推举来宣扬耶稣受难，听讲的神职人员说，耶稣受难后从没遭遇过甘特布道里说的那些事情。1619 年，甘特离开神学，到伦敦葛雷欣（Gresham）学院成为天文学教授，显然受益于他从前的两样经历。

226° 哈雷的大度和毅力

哈雷（1656 ~ 1742）青少年时代就显得前程远大。还不到

21 岁，他就来到被人遗忘的南半球，在圣海伦娜进行天文观测。他在那儿描绘了大约 300 颗恒星，第一次完整观测了水星凌日现象。因为这个结果，第一个英国皇家天文学家弗拉姆斯蒂德（Flamsteed）称他为“南半球的第谷”。22 岁时，哈雷当选为皇家学会会员。1691 年，他因为坚持唯物主义观，没能当上牛津大学萨维尔天文学教授，不过在 1703 年，他还是接替瓦利斯成为萨维尔几何教授，而且在 1721 年，继弗拉姆斯蒂德之后成为皇家天文学家。他第一个预言了一个特殊彗星的回归时间，那颗彗星就以他的名字命名了。

哈雷大度而坚韧。他和牛顿的关系最好地证明了他的大度。正是因为哈雷的坚持，因为他的资助，牛顿的《原理》才得以出版。哈雷对学者表现着一贯的友好和慷慨。

哈雷的坚韧，则突出表现在他令人难以置信地把阿波罗尼的一部作品从阿拉伯文翻译过来。这部作品已经失传了，后来伯纳德（Edward Bernard，1673 到 1691 年间为萨维尔天文学教授）才在波德尔（Bodleian）图书馆发现了它的一个阿拉伯文本。伯纳德精通东方语言，着手将它从阿拉伯文译成拉丁文，但临死才勉强完成了十分之一。哈雷对那位古代数学家的作品很感兴趣，接下了翻译的任务。其实他一个阿拉伯文也不认识，但他毫不泄气。他仔细研读伯纳德完成的 13 页译文，把他能从正文里认识的那些词找出来。然后，他考察故事情节，在头脑里反复琢磨他不认识的那些词。凭着这样的解密方法，他摸索着把握了全书的概要。然后，他把原文读了又读，不借任何人的帮助把翻译完成了。

227° “根据柯克尔”

17 世纪有许多成功的初等数学课本，而最受欢迎的英国课

本作者可能是柯克尔（Edward Cocker，1631～1675），他为自己赢得了卓越的写作和数学教师的声誉。他写过几本算术和书法艺术的书，不过霍金斯（John Hawkins）在1678年编辑的《算术，一种简单而容易的方法》里，才把“根据柯克尔”引入英国的日常语汇。这本书在大约百年的时间里经过了100版，对英国课本产生了巨大的影响。

英语的“根据柯克尔”令我们想起类似的德语的“*nach Adam Riese*”（见故事127）。

228° 天妒英才

许多数学家，如帕斯卡、伽罗瓦和克里弗德（Clifford），都有大好的前程，却不幸英年早逝了。其中一个就是科特（Roger Cotes，1682～1716），他12岁时就表现出对数学的强烈爱好。24岁时，他被任命为普卢姆天文学教授，是罗彻斯特副主教普卢姆（Plume）博士1704年设立这个职位以来的第一个上任者。1713年，科特在剑桥出版了牛顿《原理》的第二版。他的数学作品在他过早去世后不久就结集出版了。牛顿曾说，“如果科特活着，我们也许早就明白了某些事情。”

229° 在算术级数中死去

棣莫弗（Abraham de Moivre，1667～1754）生在法国，多数时间却在伦敦度过，而且是牛顿的亲密朋友。他特别引人瞩目的著作是他的《人寿保险》(*Annuities upon Lives*)，在保险统计数学的历史上发挥过重要作用；他的《机会论》(*Doctrine of Chences*)包含了许多概率论的新材料；他的《分析杂论》(*Miscellanea Analytia*）讨论循环级数、概率和解析三角。人们还相信他第一个研

究了概率积分，第一个（大概）研究了统计学中举足轻重的正态频率曲线。那个被误称为斯特林(Stirling)公式的大数表达形式

$$n! \sim \sqrt{(2\pi n)}\, n^n/e^n$$

原来是棣莫弗的，对近似计算大数的阶乘非常有用。以棣莫弗的名字命名的著名公式（但科特基本上已经提出过了）

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i}\sin nx,\ \mathrm{i} = \sqrt{(-1)}$$

是解析三角学的基础。

棣莫弗不得不靠做家教和演讲来维持自己的生活。据说，他在伦敦找了间咖啡屋做办公室，通过解决别人带来的问题获得微薄的收入和名声。

关于棣莫弗之死，常听说一个有趣的故事。根据那个故事，棣莫弗有一次说，他要求每天比前一天多睡一刻钟。当这个算术级数到达24小时那天，棣莫弗与世长辞了。

230° 激动人心的业绩

天才的一生总有些令人振奋、惊奇、感动或者泄气的事情，而数学从来是表现天才的一个亮点。苏格兰数学家麦克劳林（Colin Maclaurin，1698～1746）就是这样一个人。麦克劳林11岁就考进了格拉斯哥大学，很快表现出对数学的爱好。12岁时，他偶然看到了欧几里得的《原本》，只用几天就掌握了前六卷。15岁时，他获得学士学位，为他关于重力的论文进行了公开答辩。19岁时，他被选为阿伯丁马利夏尔（Marischal）学院数学教授，21岁时发表了第一篇重要著作，一篇几何论文，其中一些命题是他16岁时发现的。然后，他给波尔瓦锡（Polwarthy）勋爵的儿子做了一段时间的导师。27岁时，他成为爱丁堡大学数学教授的助理。那时这样的助理职位难得有薪水，牛顿个人掏

钱出来，才使学校能留下麦克劳林这样杰出的年轻人。麦克劳林及时继承了那个教授的职位。44 岁时，就在去世前两年，他发表了流数的论文，是对牛顿流数方法的第一次逻辑而系统的考察，也是为了回应贝克莱主教对微积分原理的攻击。[14]

14 参见前面故事211。

1745 年，麦克劳林积极参加了反对小僭君的活动。当那位高地人来爱丁堡时，他逃往了约克郡。不过，在爱丁堡的斗争和逃亡的遭遇，给他带来了致命的伤害。

231° 动人的个性

有些人的毅力超出了他们实际的业绩，令人雄心勃发。在数学里，桑德森（Nicholas Saunderson，1682 ~ 1739）就属于这种人。我们先罗列他的主要专业成就。他先在剑桥当助理，然后在 1711 年成为卢卡斯数学教授。1728 年，在乔治二世（George II）的推荐下，他被授予法学博士。1736 年，他当选为皇家学会会员。他是出色的老师，而尤为出名的是 1740 到 1741 年他死后发表的《代数》。他的《流数法》也是死后在 1751 年发表的。牛顿、科特、棣莫弗和其他许多读者都欣赏他的为人，他也做了很多事情让当时的数学家认识牛顿的方法。

多么动人的职业生涯啊！从什么标准看都如此。然而，谁能想到，桑德森刚一岁就因为天花而永久失明了双眼。作为剑桥的一个盲人数学家，他赢得了所有认识他的人的赞美和尊重。他完全是在头脑里培养他的数学才能，完成复杂而漫长的数学论证。

232° 崇高的墓志铭

从数学家改行为建筑学家的雷恩爵士（1632 ~ 1723，见故事150）有一行崇高的墓志铭，出现在他在 1666 年伦敦大火后重新

设计和建造的圣保罗大教堂。1723年雷恩去世时，被埋在大教堂里，刻着那行恰当的文字：*Si monumentum requires, circumspice*。（“如果你想找他的纪念碑，就看看你的周围吧”）

233° 隐藏的名字

弗拉姆斯蒂德（John Flamsteed, 1646～1719）是第一个皇家天文学家（继任者是哈雷，见故事226），他曾写道，“我冒昧地隐藏了我的名字，而没有抹去它。我用它的拉丁字母编了一句话——*In Mathesi a sole fundes*。”他的拉丁名字是Johannes Flamsteedius。

17和18世纪欧洲大陆的小数学家

234° 范施库腾家族

和瑞士的伯努利家族一样，荷兰的范施库腾（Van Schooten）家族也出了三代数学教授，不过没有一个像伯努利那样是一流的。他们都是莱顿大学教授，都对数学充满了热情。第一个是弗朗兹（Frans van Schooten, 1581～1646），在1627年构造了三角函数表。第二个是他儿子，也叫弗朗兹（Frans van Schooten, 1615～1660），在莱顿教工程，是惠更斯的老师。他编辑了韦达的著作，研究过透视，而最出名的是1649年的笛卡儿《几何》的拉丁文译本。他的同父异母兄弟彼得（Petrus van Schooten, 1634～1679）曾经是莱顿的数学教授，后来成了拉丁文教授。

235° 克莱罗家族

另一个数学的天才世家是法国的克莱罗家族。克劳德·克莱罗（Claude Alexis Clairaut）1713 年生在巴黎，1765 年在那儿去世。他是数学神童，11 岁就写出了关于三阶曲线的论文。这篇少年习作和他后来的一篇关于空间挠曲线微分几何的论文，为他破格在法兰西科学院赢得了一席之地，那时才 18 岁。1736 年，他随莫帕提斯（Maupertius）远征拉普兰，测量一度地球经线的长度。1743 年，他回到法国，发表了权威性的著作《地球形状理论》(*Theorie de la figure de la Terre*)。1752 年,他因《月球理论》(*Theorie de la Lune*, 关于月球运动的数学研究，解决了那时的一些未解难题）获圣彼得堡科学院奖。1759 年，他计算了 1759 年哈雷彗星的回归，误差大约 1 个月。克劳德和达朗贝尔之间有过学术论战，通常都不大友好。

克劳德有一个兄弟，可惜 16 岁就得天花死了。但他 14 岁就向法兰西科学院宣读了一篇几何论文，15 岁发表了几何著作。兄弟俩的父亲是一个数学老师，柏林科学院的通讯院士，写了好多几何学的书。

克莱罗兄弟大概是有史以来最早熟的数学家，是克莱罗一家 20 个孩子中的两个,这些孩子只有一个比父亲的寿命长。

236°“压扁地球的大师”

1736 年，莫帕提斯（Pierre Louis Moreau de Maupertius，1698 ~ 1759）率领一支探险队去拉普兰，测量地球在那儿的

一度经线的长度。此行的目的是为了解决关于地球形状的争论。牛顿和惠更斯指出，根据数学理论，地球在两极是扁平的，这正好和笛卡儿的观点矛盾，他相信地球在两极拉长了。1700 和 1720 年间，意大利天文学家和数学家卡西尼（Giovanni Domenico Cassini，1625 ~ 1712）和他在法国出生的儿子雅克（Jacques Cassini，1677 ~ 1756）在法国测量了从敦刻尔克到佩皮尼昂（Perpignan）的一段经线弧长，结果似乎支持笛卡儿。争论出现了，卷进来好多数学家。于是，1735 年，一支探险队向秘鲁出发，第二年，莫帕提斯的队伍远征拉普兰。秘鲁和拉普兰的测量结果确凿证明了牛顿和惠更斯的观点，莫帕提斯也赢得了 *grand aplatisseur*（“压扁地球的大师”）的头衔。为了表彰莫帕提斯的功绩，他被任命为柏林科学院院长。后来的岁月里，他就在腓特烈大帝的宫廷里享受他的荣耀。

人们把莫帕提斯说成是“压扁”了地球的人，这令我们想起哥白尼，是他让太阳静止下来。

237° 名誉扫地

莫帕提斯在柏林科学院院长的崇高位置上愉快地过了十几年，直到 1750 年，他因为力学的最小作用原理的发现，卷入了与瑞士数学家柯里格（Samuel König）的激烈争论。莫帕提斯和后来的爱因斯坦一样，一直在寻求一个能包容并统一所有宇宙定律的一般性原理。他提出最小作用原理的模糊形式，并由它导出上帝存在的“证明”。柯里格指责莫帕提斯剽窃了那个原理，还荒唐地把它推广到神学里去。争论的高潮

是伏尔泰写了《阿卡基亚博士的批判》（*Diatribe du Dr. Akakia*, 1752）来为柯里格辩护，并讽刺了莫帕提斯的形而上学企图。尽管有腓特烈大帝的支持，有欧拉的辩护，最终也没能挽救那位“自负而暴躁”的院长大人。几年后，这位泄了气的不幸的数学家在巴塞尔伯努利的家中与世长辞了。

238° 拉尼之死

这个时期的另一个不太重要的法国数学家是拉尼（Thomas-Fantel de Lagny, 1660 ~ 1734），他构造了与给定球体等体积的立方体，研究过开方法、二进制算术和解题法。关于他的死，有一个离奇的故事。莫帕提斯来到拉尼的病床前，发现可怜的他已经不省人事，于是突然问他 12 的平方是多少。拉尼像个机器人似的，从床上立起来，给出了答案，然后溘然长逝。

239° “判决的概率”

18 世纪下半叶，人们尝试着把机会理论用于新的领域。其中一个是把它用于人的判断，例如，假定每个证人和陪审员都被赋予一个度量他陈述事实或了解案情的概率，那么法庭做出公正判决的概率是多少？这种“判决的概率”（*Probabilités des jugements*），连同它隐含的启蒙哲学思想，洋溢在孔多塞（Antoine-Nicolas Caritat, Marquis de Condorect, 1743 ~ 1794）的著作里。孔多塞有一个结论说，死刑应该废止，因为不论某一个判决有多大的正确概率，在很多判决过程中，仍然存在很大的错杀无辜的概率。

孔多塞26岁进入科学院，30岁成为秘书。尽管他的数学才能有目共睹，他更出名的似乎是他在哲学、文学和政治学的研究。他想把革命的洪流引向宪政，失败了，成了共和党人的牺牲品。1794年3月28日，他被捕了，在皇后镇（Bourg-la-Reine）附近的某个地方监禁了一夜，目的是要在第二天把他送到巴黎。但孔多塞曾发誓永远不去巴黎，第二天狱卒开门时，发现他已经死了，身边有个空毒药瓶子。他践行了自己的诺言。[15]

15 有人认为他可能因为被捕前疲劳过度而死；有人认为他可能死于中风。孔多塞欢迎革命，为它做了很多事情。他最早宣布自己是共和党人，但他不能容忍极端主义者的野蛮行径。（原注）

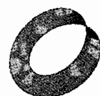
为了怕人认出来，孔多塞的行为很有意思。有一次，他乔装打扮走进一家餐馆，随便要了一份贵族的12个鸡蛋的煎蛋卷。厨师很惊讶，问他做什么生意。“木匠。”他回答。“真的？让我看看你的手。你不是木匠。”谎言被揭穿，他被当成嫌疑犯送到有关部门，于是发现原来他就是人们要找的孔多塞。

欧　拉



欧拉1707年生于瑞士巴塞尔，在那儿随约翰·伯努利学数学。1727年，他在彼德大帝创建的新圣彼得堡科学院获得数学教授的职位。14年后，他接受腓特烈大帝邀请来到柏林，执掌普鲁士科学院。25年后，欧拉回到圣彼得堡，直到1783年在76岁时去世。

欧拉写了大量数学著作，事实上，他是历史上最多产的数学家。他的名字关联着数学的每一个分支。有趣的是，在1766年完全失明以后，他惊人的创造力也没有丝毫的衰减。



欧拉除了给当时的一些杂志写研究论文，还写教科书，清晰、详尽、完整地把他的材料呈现出来。这些课本赢得了众多的读者，产生了长久的影响，至今还是有益也有趣的读物。我们不得不惊讶欧拉如泉涌的思想，难怪后来那么多大数学家都感谢他的恩泽。

欧拉是在父亲的鼓励和帮助下选择数学作为职业的。父亲是加尔文教徒，对数学很感兴趣，还在雅各布·伯努利指导下研究过数学。欧拉少年时期的宗教训练伴随他一生。他单纯而绝对的信仰使他能勇敢面对失明，但也使他很难与伏尔泰和腓特烈大帝那样的人和谐相处。欧拉结婚两次，共有13个孩子，大多夭折了，只有5个长大成人。大儿子约翰（Johann Albrecht Euler，1734～1800）在物理学有一定声誉。

240° 对欧拉的赞美

欧拉赢得了众多热情的赞美，例如下面的三句，前两句是物理学家阿拉戈（F. Arago）说的，第三句是数学史家鲁迪欧（F. Rudio）说的。

“几乎不用比喻，当然更无需夸张，可以说欧拉就是分析的化身。”

“欧拉计算不费什么力气，正如人在呼吸，鹰在天空自由翱翔。”

“我们完全可以说，现代数学的整体形式是欧拉构筑起来的。为了理解欧拉之前的任何作者的作品，人们需要克服极大的困难，因为那时还不知道让公式自己说话——欧拉是教它们说话的第一人。”

241° 欧拉的失明

1735 年，结婚后在俄罗斯的那年，欧拉收到法兰西学院的一个天体力学问题。虽然要求数学家们在几个月内解决，但欧拉用他自己改进的方法，全神贯注，三天两夜就解决了。（后来，高斯用更优越的方法，一个小时就解决了问题！）欧拉因为过度疲劳而生病，最后病好了，但右眼失明了。欧拉坦然接受了不幸，自嘲说，“我现在可以更少地分心了。”

1776 年，31 岁的欧拉再次来到俄罗斯，他剩下那只眼睛得了白内障，最后也全瞎了。对一个数学家来说，失明似乎是难以逾越的障碍，然而，就像失聪的贝多芬一样，欧拉的失明一点儿也没损害他那惊人的创造力。他通过指导秘书，把公式写在一块大黑板上让秘书抄录，继续着他的创造性工作。

1771 年，失明 5 年的欧拉做了一次手术，去除了左眼的白内障。他又能看见了。可几个星期后，发生了严重的感染，感染过后，他又全瞎了——他就这样度过了后来的 12 年。

242° 欧拉的记忆力

欧拉有着非凡的记忆力。他似乎属于那种罕见的能过目不忘的人。博闻强记的能力帮助他度过了失明的岁月。他在头脑里的黑板上计算冗长而复杂的难题，有时算到小数点后面 50 多位。据说，他背过《埃涅伊德》（*Aeneid*），能逐字背诵拉丁文的整部作品，能说出他那个版本的每一页从哪句开始，哪句结束。

243° 欧拉的专注

多数数学家在专心创造性活动时，需要隔绝的一点儿不受打

扰的平和和安静。欧拉的思想像光一样快，不必安静和隔绝，他也能专心致志。实际上，欧拉大多数创造都是在家里实现的，毫不在乎几个小孩儿在他书桌周围玩耍打闹。这位大数学家总是安详而平静，常常一手摇着婴儿，一手解决数学难题。他不怕反复被人打断，每次中断以后，他都能回到原来的地方，回到原来的情绪和思路。

244° 欧拉的多产

无疑，欧拉是数学史上最多产的数学家。他不停地写，就像口若悬河的演说家滔滔不绝地说。据说，他通常在叫他吃饭的不到半个小时的间歇里就匆匆草成一篇数学论文。

欧拉每写完一篇文章，就把它放在一叠稿纸的上面，越堆越高，就等着印刷了。当科学院会刊需要填补材料时，印刷工就从上面拿一叠去。于是，欧拉的论文经常出现后完成的先发表的情况。对同一个主题的进展过程来说，这就造成了很大的混乱。

欧拉答应为科学院提供 20 年的足够的稿件，丰富它的会刊。实际是远远超过了诺言。尽管欧拉 1783 年就去世了，但直到 1818 年，会刊都还经常收录他的至少一篇文章。

瑞士自然科学学会从 1909 年开始编辑里程碑式的欧拉全集，计划包括 73 卷四开本，但后来发现的被遗忘的材料，将使卷数大为增加。战争和后来的通货膨胀使原先的捐赠化为乌有，但人们希望来自全世界的数学家和数学机构的订单，能保证全集的实现。让全世界都来承担全集的费用是理所当然的，因为欧拉属于整个文明世界，而不仅属于瑞士。

自然有人想知道，谁有幸成了第二多产的数学家？现在看来，这个荣誉要么归于英国数学家凯莱（Arthur Cayley，1821 ~

1893）——许多人想不到，要么归于法国数学家柯西。要统计了他们作品的页数，才能确定荣誉应该归谁。

245° 博学的欧拉

欧拉的学识和兴趣绝不仅限于数学和物理学。他是一个杰出的通才，对天文学、医学、植物学和化学有着特别广博的知识。他用心读过罗马作家的作品，熟悉各个时代、各个民族的民间传说和文献历史，还广泛了解人文学科的所有分支。他那非凡的记忆力无疑有助于他徜徉在众多的学科。

欧拉的两个朋友、伯努利家的丹尼尔和尼古拉去圣彼得堡时，写信给瑞士的欧拉，告诉他科学院新设了心理学部，请他赶紧复习一下，申请那个职位。欧拉照做了，而且 20 岁时被圣彼得堡科学院接受了。幸运的是，就在欧拉到圣彼得堡那天，卡婕琳娜一世（Catherine I）驾崩了，科学院的组织一片混乱，那个医学职位被人忘了，欧拉便意外地走上了数学部的岗位。

246° 一篇力学论文的出现

欧拉很欣赏维吉尔的《埃涅伊德》，不但能从头到尾一字不落地背诵整部的拉丁文本，照他自己说的，他还从这部史诗的一行引出了一篇论文——那行诗写的是（译文）：“锚落下了，飞驰的船停了。”

数学问题不时从文学作品中产生出来。例如，我们还记得古老而著名的倍立方问题，即用直尺和圆规作一立方体的边，使其体积为给定立方体的两倍。有证据表明，这个问题的文字可能来自某个没学过数学的古希腊诗人，他描写了神秘的米诺斯王不满为他儿子克劳库斯（Glaucus）修的墓的大小。米诺斯下令把墓

扩大一倍。诗人告诉大王，把墓的每边扩大一倍就能实现了。诗人的拙劣数学引发几何学家考虑一个问题：如何既保持形状又能将立方体体积加倍呢？

就在几年后，又一个问题出现在《美国数学月刊》的问题专栏，它源自《米尼弗夫人》（*Mrs. Miniver*）的几行文字：[16]

> 她把每个关系都看作一对相交的圆。乍看起来，重叠越多，关系越好。但并非如此。超越了某一点，消减律就会起作用，两边没有足够多的个人资源留下来丰富共享的生活。当两个外面的月牙的面积加起来正好等于中间的叶片时，可能就达到完美了。在书上，一定有某个数学公式能做到这一点，但在生活中，没有。

问题是讨论给定半径的圆是否存在惟一的解。

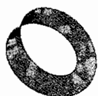
16 参见《告别数学圈》（A77）。

247° 欧拉，超级计算机

1785 年，孔多塞（见 239）在向科学院宣读的《悼欧拉》（*Eloge de M. Euler*）中说起欧拉的两个学生，他们把一个复杂的收敛级数算到 17 位，就为了找出两人的结果在第 15 位有什么不同。他们请老师决定哪个答案是对的，欧拉在头脑里计算了一遍，立刻就解决了争论。

248° 欧拉加入普鲁士科学院

35 岁时，腓特烈大帝请欧拉到柏林，为普鲁士科学院增光。欧拉欣然同意，愉快地离开了被女皇安娜为了清除间谍和叛徒而血洗过的俄罗斯。普鲁士女王很喜欢欧拉，可欧拉还是不爱说



话。问他为什么沉默寡言，欧拉回答："夫人，我来自乡村，在我们那儿，谁说话就会被绞死。"

249° 欧拉回到俄罗斯科学院

欧拉在普鲁士科学院过了 25 年，但他的个性不是腓特烈大帝喜欢的那种，多年来并不愉快。俄罗斯人很看重欧拉，即使他去了普鲁士，还继续给他预付一定的薪水。1760 年，普鲁士与俄罗斯和其他敌人卷入了 7 年战争。趁腓特烈大帝率军在西西里亚的布雷斯劳，俄罗斯侵入普鲁士，占领了柏林。战事期间，欧拉在离柏林大约 4 英里的夏洛滕堡（Charlottenburg）务农，被俄罗斯军队打劫了。当俄罗斯将军知道了农庄属于欧拉，立刻照单赔偿，伊丽莎白女皇还另外补偿了 4000 克朗。对比腓特烈大帝宫廷的冷漠，俄罗斯人的热情促使欧拉在 1766 年接受了来自卡婕琳娜女皇的邀请，回到圣彼得堡科学院，在那儿度过了一生最后的 17 年。

250° 九死一生

回俄罗斯 5 年后，欧拉的房子和家具在 1771 年圣彼得堡大火中化为灰烬。双目早已失明的欧拉全靠他的瑞士仆人的英勇才从火里逃出来。卡婕琳娜女皇立刻送给他一套全新家具的新居。

251° 形式主义者和他的铅笔

在数学里，讲形式的计算者常常难过地感到铅笔的智力超越了他本人。欧拉承认，这样的感觉他总是挥之不去。

252° 欧拉－狄德罗轶事

人们最常听到的一个数学家轶事说，法国哲学家狄德罗曾败在虔诚的宗教信徒欧拉的手下。故事最早是西艾波特（Thiebault）在他1801年的《柏林20年回忆录》（*Mes souvenirs de vingt ans de sejour a Berlin*）里讲的，后来，德摩根在他1878年的《悖论集》（*Budget of Paradox*）中又添枝加叶地重新讲了。此后，许多数学家都重复过这个故事，也都是德摩根的情节。下面就是德摩根说的故事：

> 下面的故事是西艾波特讲的，在他老年时（大约1804年）出版的《柏林20年回忆录》里。本书被公认为真实可靠的；1807年，莫伦多夫（Marshall Mollendorf）告诉巴萨诺公爵（Duc de Bassano），那是最诚实的人写的一本最真实的书。西艾波特说，他本人不了解故事的真假，但欧洲的整个北方都完全相信那是真的。狄德罗应女皇邀请访问俄罗斯宫廷。他说话很随便，给宫廷圈子里的人大讲无神论。女皇很开心，但有些议员建议应该检验一下他宣扬的学说。女皇不想封客人的口，于是设想了下面的一幕。有人告诉狄德罗，一个老练的数学家拥有上帝存在的代数证明，如果他愿意，那人将在宫廷里说给他听。狄德罗高兴地答应了，尽管没告诉他那数学家是谁。那人就是欧拉。欧拉走到狄德罗跟前，严肃地以十分自信的口气说：先生，$(a+b^n)/n=x$，所以上帝存在，请回答！（*donc Dieu existe*；*repondez*！）整个宫廷笑声四起，认代数像天书的狄德罗则感到局促而恐慌。他马上请求回法国，主人答应了。

德摩根的故事与西艾波特讲的，有四点不同：（1）数学公式略微不同；（2）西艾波特没说是哪个数学家；（3）“认代数像天书”是德摩根加的；（4）德摩根的意思是狄德罗没有能力做出数学回答，而西艾波特只讲了狄德罗没有回答，因为他在观众里感到了敌意。

第一点不同无关紧要，至于第二点，假如西艾波特的故事是真的，那么数学家可能是欧拉，因为欧拉那时在俄罗斯。但第三点和第四点暴露了德摩根的故事肯定不是真的。因为狄德罗是一个优秀的数学家，在游历俄罗斯前曾出版过 5 本可信的数学文集。例如，在第二本文集里，他证明了三大古典难题（倍立方、三分角和化圆为方）只有在给了圆及其渐开线的条件下才能解决。在这篇论文里，狄德罗表现了对代数、几何和微积分的良好把握。这就是说，德摩根和后来作者们津津乐道的那个故事是荒谬的。

也许有人还想知道，西艾波特的故事是真的吗？奇怪的是，假如整个北欧都相信这个故事，就没人和它相干了。例如，没听说俄罗斯人讲过这个故事。而且，故事也几乎不符合欧拉的性格。欧拉不会做愚蠢的没有思想的事情。

更可能的解释是，故事源于腓特烈大帝宫廷的谣传。腓特烈大帝是狄德罗不共戴天的仇敌，还有很多证据说明狄德罗在圣彼得堡的故事是从柏林传出去的。

我们想知道的是，有多少大人物的“好”故事能经过历史的检验而完整地流传下去。

253° 欧拉之死

直到弥留之际，欧拉仍然保持着旺盛的精力，那是他 77 岁那年，1783 年 9 月 18 日。下午，他玩儿着计算气球上升的规律。然后，他与朋友莱克塞尔（Lexell）和家人一起晚餐，勾勒新近发现的天王星的轨道计算。过了一会儿，他让把小孙子带进来。和孙子玩儿的时候，他被打了一下。烟斗从手上落下，他说，“我要死了。”那一刻，用孔多塞的话说，“欧拉停止了生活和计算。”

拉格朗日

拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736 ~ 1813）生在意大利都灵的一个原籍法国的家庭。1766 年，继任了欧拉在柏林科学院的职位，在那儿过了 20 年。后来，他不顾法国政局的混乱，来到巴黎，帮助新建立的师范学校和理工学校。拉格朗日对后来的数学研究有着深刻的影响，因为他是最早把微积分严格化的一流数学家。他在力学、微分方程和变分法等领域有着杰出的贡献。他还热衷数论，写过重要的数论论文。他早年的一些关于方程的研究，后来把伽罗瓦引向了群论。

254° 谁是 18 世纪最杰出的数学家？

18 世纪最杰出的两大数学家是欧拉和拉格朗日，而他俩谁是第一，却是争论不休的问题，常常反映了争论者们不同的数学感受。欧拉发表的作品当然远比拉格朗日多，研究的数学领域也比拉格朗日广，但他主要还是一个形式主义者或公式的操作者。

而拉格朗日呢，也许可以认为是第一个真正的分析家，而且，他的作品具有难得的完美、精致和精确，虽然从数量看，他发表的东西堆积起来，与欧拉的威苏威火山相比只不过是鼹鼠的小土丘。欧拉的作品任由直觉发挥，充满着细节；拉格朗日的作品力图严格，简洁而明晰。

如果问欧拉和拉格朗日能否被认为是超级数学家，这个问题可能在数学大会或数学家中间激起热烈而兴奋的争论。争论的结果很可能是争论者平分为两派，一半拥护欧拉，一半拥护拉格朗日。



拉格朗日（1736～1813）

若干年前，伊尔斯（Walter Crosby Eells）试图决定生活在1905年以前的100个最杰出的数学家，并为他们排序。（见他的论文“100个杰出数学家”，《数学教师》1962年11月，582～588页。）在他的名单里，牛顿排第一，莱布尼茨第二，拉格朗日第三，欧拉第四。

至于伊尔斯的排行榜，要引用他自己说的方法，才显得公平。

不同的研究者用了不同的方法（没有一种能逃脱反对的声音）来选择一个领域的一群杰出人物，并根据他们的杰出来排序。总的说来，所谓“空间方法”几乎没有多少



疑问，它能得出最为可靠的结果，特别是选择那些已经去世了的、其地位在历史上已经相对固定的人。这个方法的基本程序是，度量一个人在传记词典、标准百科全书和其他合适的参考书里占据的篇幅，然后把那些超过某个最小篇幅的人认定为“杰出的”……

一个数学家的杰出，可以根据他的生平和成就的传记的篇幅来决定，这个假设能令人满意吗？“杰出”本身就是一个难得有满意定义的名词，更是一个难得定量的性质。不过，只要能认识其局限，这种努力还是有意义的。

度量一个人的杰出程度，除了篇幅而外，还有别的方法。其中一个方法包括，发表作品的数量、在人物目录里出现的相对频率、检索的相对频率、作品在主要图书馆的收藏数量、用于他们的形容词的可爱程度的比较、特定人群对他们的综合评判，等等。

通过研究不同研究者所用的五花八门的方法，得出一个结论：“空间方法”的反对者最少。诚然，许多偶然或争议的因素，能使一个人得到过多的与他作为数学家的杰出不成比例的传记空间。假如一个人生命历程漫长，多方游历，他可能会占去更多的空间，超过那些在数学发展中可能更为重要的人物。人们更多关注的是他丰富的阅历，而不是他本质的数学价值。在文学作品里，牛顿、莱布尼茨和他们的支持者之间关于微积分发现的不幸争论，占去了大量的笔墨，超出了争论本身的意义，但在这个例子中（也许是这类事例中最突出的），多余的篇幅同样有助于二人的名声。假如把那些文字删除干净，牛顿的地位依然巍峨，但莱布尼茨可能就不会领先拉格朗日和欧拉，而会落在他们后面。不过从事

实看，在推想和考虑这几个人的地位的可能失误时，我们惟一能说的是，他们实际上是一样伟大的……

于是，命运多变或争议太多的人，显然更有可能比那些在真正的数学贡献上同样伟大甚至更伟大的人，占据更多的传记空间。然而，即使这些因素，也在一定意义上增强了他们的“杰出”。杰出不必是成就的同义词。但总体说来，不带偏见的历史读物表明了作者们没有受这些考虑的重大影响，因而没有出现与以上总结严重偏离的结果。他们的多数空间用来讨论人物的作品和他在科学发展史上的重要作用，而不是大讲他们的生活细节。因此，像我们这个研究一样，选择足够多样的不同民族和国度的典籍，似乎还是有可能选出一个有充分可信度的令人满意的杰出数学家的排行榜。

255° 腓特烈大帝请拉格朗日去柏林

欧拉离开柏林时，腓特烈大帝写信给拉格朗日，说“欧洲最伟大的帝王”希望“欧洲最伟大的数学家”来他的宫廷。

256° 一部科学诗

拉格朗日的丰碑《分析力学》（*Mechanique analytique*）是他在柏林开始写的，被哈米尔顿爵士（Sir William Rowan Hamilton）誉为一部“科学诗”。

257° 巍峨的金字塔

拿破仑（Napoleon Bonaparte）评价拉格朗日说，“拉格朗日是数学的巍峨的金字塔。”

258° 一篇小短文

拉格朗日曾认为他“证明”了欧几里得平行公设。他把“证明”写下来，带到学院，然后开始宣读。他发现第一段有一个小疏忽，于是嘟囔着“我应该再多想想”，就把文章放进兜里，坐下来。

259° 财富与数学

拉格朗日的父亲很富有，部分来自家传，部分来自夫人。可他是一个愚蠢而不可救药的投机者，等他临死的时候，已经没有什么留给儿子的了。拉格朗日晚年说这场灾难是他最幸运的事情:“假如我继承了财产，我大概就不会做数学了。”

260° 伟大的浪费

随法国大革命而来的恐怖和残忍令拉格朗日痛恨万分。当伟大的化学家拉瓦锡（Antoine-Laurent Lavoisier，1743～1794）走向断头台时，拉格朗日义愤地说，“刽子手瞬间就能砍下他的头，但一个世纪也不够再产生一个那样的头脑。”

261° 黄昏恋曲

拉格朗日常感到孤独和失望。到了晚年，他 65 岁时，才从这种心境走出来，挽救他的是一个小他近 40 岁的女孩儿。她是他朋友天文学家莱蒙涅（Lemonnier）的女儿。拉格朗日的不幸令她难过，她坚持要嫁给他，他答应了，成就了一桩幸福婚姻。事实证明她是忠诚而能干的伴侣，成功地把丈夫从泥潭拉出来，重新唤起他对生活的渴望。拉格朗日曾发自肺腑地说过一句话:

世间的一切奖赏中，他最欣赏的是他温柔而忠实的小妻子。

拉普拉斯


拉普拉斯(1749～1827)

拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749 ～ 1827）生在法国博蒙昂诺日（Beaumont-en-Auge）。他的数学才能很早就为他赢得很好的教书工作，而且，在法国大革命的动荡岁月里，他像一个政治投机者，见风使舵，逢迎着当权的集团。他最杰出的工作是在天体力学、概率论、微分方程和大地测量领域。

262° 拉普拉斯找工作

年轻的拉普拉斯来巴黎谋求数学教授的职位时，把名人的推荐信交给达朗贝尔，但没有回音。拉普拉斯回到寄居的房子，给达朗贝尔写了一封精彩的讨论一般力学原理的信。信打开了大门，达朗贝尔回信说，“先生，你看见了我对你的推荐信不感兴趣。你不需要任何推荐；你已经更好地介绍了自己。”几天后，拉普拉斯被任命为巴黎军事学院数学教授。

263° 法国牛顿

拉普拉斯的五卷巨著《天体力学》（*Mechanique céleste*）（1799～1825）为他赢得“法国牛顿”的头衔。这部著作包容了以前所有的天体力学成果和他本人的贡献，标志着作者是这个领域无与伦比的大师。本书被誉为现代的《大成》（*Almagest*）。[17]

17 参见第二象限102。

264° 不需要的假设

拿破仑对拉普拉斯开玩笑说，《天体力学》里没提到上帝。

拉普拉斯回答，“先生，我不需要那个假设。”后来拿破仑把这话告诉了拉格朗日，听到的回到是，“哦，不过那是一个很好的假设，它解释了好多事情。”

265° *Il est aise a voir*

毕奥（Jean-Baptiste Biot，1774～1862）曾帮助拉普拉斯为出版社修订《天体力学》，他说拉普拉斯经常不能还原他的推理步骤，但如果他对结果满意，就会插入一句口头禅似的话：“显而易见”（“*Il est aise a voir*”）。

美国天文学家鲍迪奇（Nathaniel Bowditch，1773～1838）把《天体力学》翻译成英语时说，“我每次遇到拉普拉斯说‘于是显而易见’，就感觉自己又要花几个小时来填补缺口，去发现它是如何显而易见的。”

266° 力学家的信仰

在1812年的《概率的分析理论》（*Théorie analytique des probabilités*）中，拉普拉斯说，“在某个时刻，假如有某种理性能把握驱动自然的所有力和构成自然的每个事物的位置，而且那理性能充分将那些数据投入分析，将宇宙间最大物体的运动与最轻的原子的运动囊括在同一个方程里，那么对那样的理性来说，没有什么是不确定的，未来与过去都将呈现在它的眼前。人类的头脑隐约显现了那理性的轮廓，而它完美地袒露给了天文学。它在力学和几何的发现，连同它发现的万有引力，使它能用同一个解析表达式来认识世界体系的过去和未来的状态。”我们在别处看到更简洁的说法：“自然的所有现象不过是少数几个不变定律的数学结果。”[18]

18 这是代表经典的决定论的最有名的一段话。

267° 拉普拉斯的“干儿子”

尽管拉普拉斯在政治上投机耍滑，趋炎附势，对年轻后学却慷慨热情。毕奥说，他年轻时在法国科学院宣读一篇科学论文，当时拉普拉斯也在场。会后，拉普拉斯把他拉到一边，给他看了他在一篇还没发表的旧手稿里的同样发现。拉普拉斯要毕奥保密，鼓励他赶紧把文章发表了。

拉普拉斯常说，数学研究的年轻人是他的“干儿子”，有几次他拒绝发表自己的发现，让年轻人有机会先发表。遗憾的是，这样的慷慨在数学界太稀有了。

拿　破　仑

拿破仑（Napoleon Bonaparte，1769 ~ 1821）对数学怀有虔诚的敬意，对当时的大数学家钦佩万分，而他自己也是一个不错的几何爱好者。

268° 数学与国家福利

蒙日（Gaspard Monge，画法几何的倡导者，空间曲面和曲线的微分几何的创始人）和傅里叶（Joseph Fourier，热流的数学理论的奠基者，发现三角级数重要性的第一人）是拿破仑的亲密朋友，为这位皇帝的军事和文化业绩帮过大忙。据说，蒙日也许是惟一赢得拿破仑无私和长久友谊的朋友。

拿破仑认识到，无知只能导致灭亡。于是，他命令并鼓励开办学校。为了培训急需的教师，他创立了巴黎师范学校（*École Normale*）；为了激励高等研究，他创立了巴黎理工学校（*École*

Polytechnique)。在这两所伟大学校的创立中，蒙日和傅里叶都竭尽全力地帮助了拿破仑。拿破仑对数学重要性的认识,特别表现在他的远见中:"数学的进步和完善是与国家富强休戚相关的。"

拿破仑常在简单的数学联系中寻求乐趣和轻松。不过，阿波特（J. S. G. Abbott,）在拿破仑传记中说的话，还是不那么可信："每当他［拿破仑］有闲暇时间，就都用来看对数表，常能找出错误来。"

269° 拿破仑问题

拿破仑是意大利诗人兼数学家马歇罗尼（Lorenzo Mascheroni, 1750～1800）的朋友。马歇罗尼对只用圆规来完成欧几里得作图（能用直尺和圆规完成的几何作图）很感兴趣，拿破仑也很可能就在和他的交往中发生了对这类问题的兴趣。

卡约里（Florian Cajori）在他的《数学史》中说，"拿破仑向法国数学家提出了一个问题，只用圆规将圆周四等分。马歇罗尼用了三次半径来解决问题。他得到弧 AB, BC, CD, 则 AD 为直径。其余就显而易见了。" 在读下一段之前，读者可能想自己完成作图中那"显而易见"的步骤。

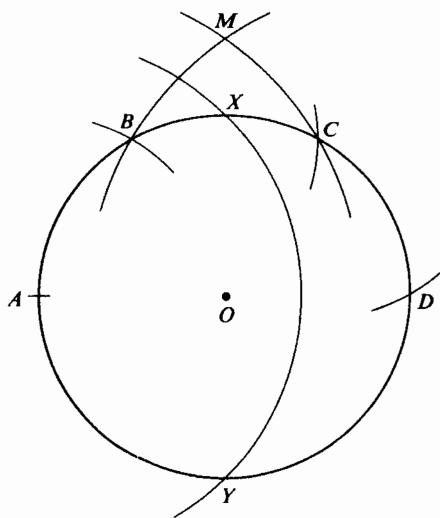


图 31

尽管不那么显而易见，也不是太难。如图

31，以 A 为圆心画半径为 AC 的弧，与以 D 为圆心半径为 DB 的弧交于点 M；画以 A 为圆心 OM 为半径的圆（O 为已知圆的圆心）切割已知圆于点 X 和 Y，于是 A，X，D，Y 为圆的内接正方形的顶点。

据说，拿破仑相信军事谋略与数学对策之间存在着某种相似性，他有时会拿简单的几何习题来考验他的军官。

270° 拿破仑定理

有个优美的几何定理说：如果三个等边三角形外接于任意三角形的三边，则这些三角形的外接圆心构成第四个等边三角形（见图32）。这个有着许多诱人的推论和扩展的定理，据说是拿破仑发现的。当然，他似乎没有足够的几何知识来发现和证明它，正如他没有足够的英文水平说出下面那句著名的回文：

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.[19]

19 据说这是拿破仑流放厄尔巴岛（Elba）时的感叹："我来厄尔巴之前是何等威风！"

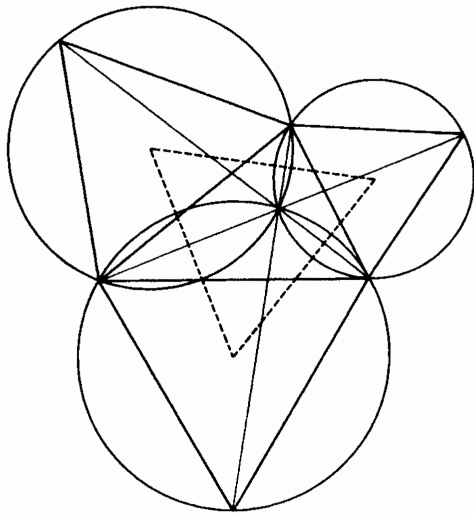


图 32

第四象限

从集邮上的阿贝尔到课堂上的维纳



阿贝尔和玛丽亚

271° 邮票上的荣耀

阿贝尔（Niels Henrik Abel, 1802 ~ 1829），因为极其偶然的原因成为挪威最有名的数学家，但年仅 26 岁就过早地离开了人世。在生命的最后 8 个月里，他挣扎在穷困和绝望中，营养不良又肺病缠身，想找一个大学教书的工作来养活自己都绝望了。没人关心他，政府也在临死前才认识他，最后他得到了身后的荣耀，挪威最伟大的数学家，如今出现在一些小型张邮票上面。[1]

不过数学家以他们特有的方式为阿贝尔树立了远比铜像更为长久的纪念碑。今天，任何一个念高等数学的人都会在许多定理和理论中遇到阿贝尔那不朽的名字，因为他正如埃尔米特（Hermite）所说的，"为数学家留下了够他们忙活 500 年的东西。"

1 在邮票上出现过的其他数学家有，阿基米德、亚里士多德、博莱父子（Farkas Bolyai 和 Janos Bolyai）、博斯科维奇（Boscovich）、布丰、卡诺父子（L. N. M. Carnot 和 N. L. S. Carnot）、张衡、祖冲之、夏普雷金（Chaplygin）、哥白尼、克里斯台斯库（Cristescu）、库萨的尼古拉

272° 柯莱丽和吉尔豪

阿贝尔在弗罗兰史密斯夫妇的英国家中度过了最后的日子，


阿贝尔在弗罗兰的纪念碑

(Cusanus)、达朗贝尔、达·芬奇、笛卡儿、德维特(De Witt)、丢勒、爱因斯坦、欧拉、伽利略、高斯、热贝尔、哈米尔顿、赫姆霍兹、喜恰帕斯(Hipparchus)、惠更斯、开普勒、卡巴列夫斯基(Kovalevsky)、克雷洛夫(Krylov)、拉格朗日、拉普拉斯、莱布尼茨、李亚普诺夫、罗巴切夫斯基、洛伦兹、墨卡托、蒙日、纳齐尔·爱丁(Nas̩îr-Eddin)、牛顿、奥斯特洛格拉德斯基(Ostrogradsky)、帕斯卡、庞加莱、波波夫(Popov)、毕达哥拉斯、拉马努扬、里泽(Riese)、斯特芬(Stevin)、特克塞拉(Teixeira),泰特卡(Titeica)和托里切利。俄罗斯和法

他的未婚妻柯莱丽(Crelly Kemp)在那儿做家教。尽管有柯莱丽热切的关心和怜爱的照顾,有主人家两个大女儿的帮助,阿贝尔还是越来越虚弱,咳嗽也越来越厉害。他最后挂念的是他深爱的柯莱丽的未来,就写信给他的好朋友吉尔豪(Baltazar Mathias Keilhau),请求他帮助柯莱丽。阿贝尔半开玩笑地说,他们两个要在死后结婚。

尽管柯莱丽和吉尔豪从未见面,但是,在阿贝尔去世几个月之后,他那忠实的朋友深感责任重大,写信给柯莱丽解释说,他觉得实现他朋友遗愿的最好方式就是请她答应做他的妻子。1830年1月,柯莱丽26岁生日那天,两人订婚了。第二年秋天,他们结婚了,柯莱丽成了奥斯陆的"教授夫人"(Fru Professor),可惜不像她过去梦寐以求的,在亲爱的尼尔斯的身边。

阿贝尔安葬在弗罗兰(Froland)教堂原为史密斯夫妇留的地方。柯莱丽和吉尔豪虽然已经订婚了,还是驱车来到墓前表达他们最后的敬意。就在那时,吉尔豪决定筹集资金为阿贝尔树立一座永久的纪念碑。今天来弗罗兰教堂的朝觐者们可以看到吉尔豪为朋友树立的纪念碑。

273° 早熟而多才的梦游者

18世纪意大利最博学的女数学家是玛丽亚·昂雅泽(Maria Gaetana Agnesi)。她1718年出生在米兰,是她父亲两个孩子的老大。小时候她学会了拉丁文、希腊文、希伯来文、法文、西班牙文、德文和其他多种外国语言。才9岁,她捍卫女子高等教育的演说就出版了。童年时代,她父亲组织知识分子聚会,小玛丽亚就能和学富五车的教授们用他们本国的语言谈他们选择的话题。后来,当她20岁时,出版了《哲学命题》(*Propositiones philo-*

sophicae)，就是根据她在父亲的聚会上的一些谈话写成的关于哲学和自然科学的系列论文。30岁时，她出版了两卷关于解析几何的书，赢得了读者长久的喜爱，还被译成几种文字。接下来的年月里，教皇本尼迪克特（Benedict）十四世任命她为波洛尼亚大学荣誉教授，但她从来没去讲过课（这和有的故事说法不同）。

国最喜欢用邮票来纪念数学家；英国从来不这样做；美国只做过一次。达·芬奇、伽利略、哥白尼和爱因斯坦曾出现在四个或更多国家的邮票上。（原注）

玛丽亚很讨厌抛头露面，渴望在不同的时间过有规律的生活。1752年父亲去世以后，她生活才稳定下来，把后半生都奉献给了慈善事业和宗教研究。1771年，她被任命为米兰的一个慈善机构负责人，1799年在那儿去世。她有个妹妹特蕾莎（Maria Teresa Agnesi，1724～1780），是成功的音乐家和作家。



玛丽亚·昂雅泽

玛丽亚的一生中，不仅是著名的数学家、语言学家和哲学家，还是出了名的梦游者。她有好多次在梦游状态下走进书房，点亮灯，然后解决她醒时留下的未解难题。早晨起来，她自己都奇怪那解已经仔细而完整地写出来放在书桌上了。

274° 昂雅泽的巫婆

费马应该认为是解析几何的创始者之一，他曾热衷于一种三次曲线，用今天的记号可以用笛卡儿坐标表示为方程 $y(x^2+a^2)=a^3$。曲线如图33。费马没有给曲线命名，后来研究它的格兰迪（Guido Grandi，1672～1742）才称它为 *versoria*。这是一个拉丁词，意思是引导航行的绳子。不知道格兰迪为什么给这种

三次曲线起了这样一个名字。意大利文有个类似的废弃名词 *versorio*，意思是“在各方向自由运动”，曲线的左右渐近特征说明，格兰迪也许是想用后面这个词来称曲线的。不管怎么说，玛丽亚在写她广为流传的《解析几何》时，混淆了格兰迪的 *versoria* 或 *versorio*，写成 *versora*，拉丁意思是“魔鬼的外婆”或“女妖精”。后来，1801 年，科尔松（John Colson）把玛丽亚的书译成英文时，将 *versora* 译成“巫婆”。从此，曲线在英文里被称作“昂雅泽的巫婆”，不过，在其他语言里，它一般被更简单地称作“昂雅泽的曲线”。

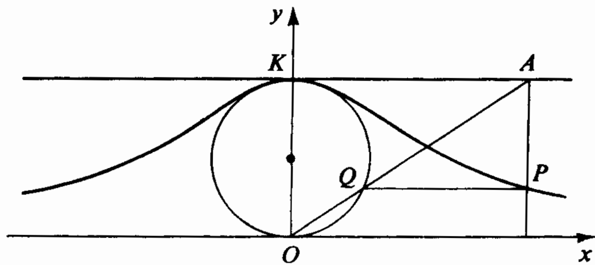


图 33

昂雅泽的曲线有许多漂亮的性质。首先，曲线可以像下面那样巧妙地描写为一点 P 的轨迹：令经过给定圆上一点 O 的可变割线 OA 割圆于点 Q，并与经过 O 的对跖点 K 的切线交于 A。分别与切线平行和垂直的直线 QP 和 AP 交于点 P，于是，曲线就是 P 点的轨迹（图 33）。如果把过 O 的切线取作笛卡儿坐标系的 x 轴，OK 取作 y 轴，记给定圆的直径为 a，则曲线的方程为 $y\ (x^2+a^2)=a^3$。曲线关于 y 轴对称，而且在正负方向上趋近于 x 轴。曲线与渐近线之间的面积为 πa^2，恰好是给定圆面积的 4 倍。区域的中心在点（0，$a/4$），从 O 到 K 距离 1/4 的地方。相对于渐近线旋转曲线生成的体积为 $\pi^2a^3/3$。曲线拐点出现在 OQ

与渐近线呈60°角的地方。

将纵坐标（y 坐标）加倍，得到与玛丽亚曲线相伴的所谓“伪曲线”。格里戈利（James Gregory）在1658年研究过这种曲线，1674年，莱布尼茨还用它导出了著名的公式

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$$

巴 贝 奇

大约1812年，英国数学家巴贝奇（Charles Babbage，1792～1871）开始思考建造机器来帮助计算数学用表。有个故事说，有一次，年轻的赫歇尔（Herschel）拿来一些为天文学会做的计算，请他检查，他心里便有了做机器的想法。在枯燥的检查过程中，赫歇尔和巴贝奇发现了许多错误，最后巴贝奇感叹道，“但愿这些计算能让蒸汽机来做。”赫歇尔回答，“那太有可能了。”从此以后，与赫歇尔的相互交流令他着魔了，那宏愿主宰了他的后半生，也使他从一个快乐的年轻人变成一个痛苦的



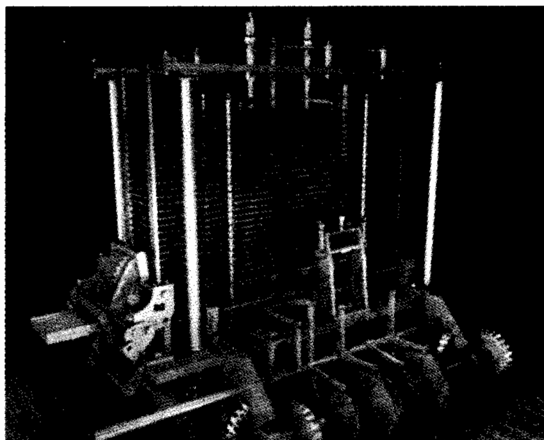
巴贝奇带着巨大的热情和动力，全身心地投入了计划，他在实验中耗尽了可观的个人积蓄。1822年，他在给皇家学会的一封信里指出，政府有了那样的机器会有多大好处，它能为航海和天文学计算冗长的数学用表。他建议为政府建造那样的机器。他的提议得到了热忱的支持，1823年，政府同意资助他的事业，预期三年。

巴贝奇开始制造他所谓的“差分机”，能用26位有效数字，能计算并打印直到6阶的相邻数字的差分。但工作进展并不令人满意。巴贝奇总是不断涌出更新更宏大的构

思，使以前做的都报废了。结果，大约 10 年过后，政府不再资助了。于是，巴贝奇放弃了差分机，开始做更雄心勃勃的所谓“分析机”，能完全自动地进行赋予它的整个算术计算。这种机器最后也没能实现，主要是因为缺乏资金，也因为那时还没有足够精确的工具。

英国政府大约为建造差分机投入了 17 000 英镑，巴贝奇自己也花了差不多的钱。未完成的机器和完整机器的蓝图原来收藏在伦敦国王学院博物馆，后来转移到南肯辛顿（Kensington）博物馆，现在还在那儿呢。展示的部分还能很好运行，不久前全部拆开来清洗重装，以便为美国国际商务机器（IBM）公司的博物馆做一个复制品。

尽管巴贝奇的计划失败了，但它们确实也激发了最近涌现的机械和电子巨人的头脑。巴贝奇清晰阐明了所有现代计算机都遵从的基本原理。英国《自然》杂志 1946 年发表一篇讨论美国第一代大型计算机（哈佛继电器计算机，Mark I）的文章时，给的标题是：“巴贝奇梦想成真”。



后人完成的巴贝奇分析机

275° 不是先知的先知

巴贝奇预见了今天我们熟悉的一个重要领域即所谓的运筹学（*operations research*）。预示这概念的是他的那本《机器和制造业的经济》（*Economics of Manufactures and Machinery*），它研究了各种制造业的过程，而且附带也激发了他对计算机的兴趣。简单说，运筹学就是关于商务问题的科学分析，旨在为执行者和管理者提供充分的信息，从而进行更有效的商务运作。

巴贝奇还引领了另一股潮流。他发动了一场运动向政府争取科研和教学津贴。那时候，科学研究还几乎只是绅士们消遣的娱乐。

276° 分析学会

巴贝奇喜欢交际，很幽默。他协助建立了天文学会（1820）、英国科学促进会（1831）和伦敦统计学会（1834）。他在许多酒会风光无限，也是众多俱乐部的荣誉会员（如扑克、象棋、划船等等）。

巴贝奇最亲密的朋友是年轻的赫歇尔（后来的约翰爵士）和皮科克（George Peacock，后来是伊利教堂的主教）。上大学时，巴贝奇、赫歇尔和皮科克达成一个约定，“尽他们的努力让世界比他们看到的更聪明”。为了达到这个目的，他们在 1812 年迈出了第一步，为使“英国数学家与他们的大陆对手有同等的基础”，和其他几个人一道建立了分析学会。

简单说，分析学会的初衷是为了改变英国数学家的严峻形势，他们还深陷在过去的牛顿与莱布尼茨的微积分发现优先权的痛苦争论中。他们支持牛顿，把牛顿当领袖，把自己与大陆的数



学发展隔绝了，结果英国的数学几乎可怕地落后了一百年。当大陆数学家们用莱布尼茨优美自然的记号 dy/dx 代表导数时，英国数学家还在用牛顿那不幸的流数符号 $\dot{y}$。于是，借巴贝奇的诙谐说，分析学会倡导“纯粹的 d 主义原理，反对宇宙的圆点状态”。

1816 年，巴贝奇、赫歇尔和皮科克将拉克鲁瓦（Lacroix）的一卷本《微积分》翻译成英文，极大地帮助了学会的教学改革和微积分符号的使用。1817 年，改革的成果更大了，那年，皮科克被任命为数学荣誉学位考试的主考官，在剑桥大学的考试中用微分符号取代了流数符号。

277° 巴贝奇和丁尼生

巴贝奇处处留心数学用表和计算中的错误，他常写信给科学学会和政府机构，指出那些疏忽和错误。他对统计准确的要求甚至波及了诗歌。据说，他曾给诗人丁尼生（Lord Alfred Tennyson）写了下面的信，谈他的《罪的幻影》（“The vision of sin”）里的两句：

> “每分钟死一个人，每分钟又有一个人出生”：我看用不着我告诉你，这里的计算将使世界人口的总和永远处于平衡状态，但众所周知的事实是人口总数在不断增长。于是我冒昧地建议，在您的卓越诗作的下一版，将我指出的计算错误改成下面那样：“每分钟死一个人，同时又出生一又六分之一人。”我还要补充，准确的数字是 1.167，不过，当然了，有些事情还得给诗歌的格律让步。

事实是，在 1850 年之前，这两行诗的所有版本都是“每分

钟死一个人，每分钟又有一人出生”，而在后来的所有版本里，它成了：“每一瞬间死一个人，每一瞬间又有一人出生。”

278° 奇迹之源

大家都知道，一个数列可以用一个复杂的数学法则来定义，例如，令它前一亿项服从某个简单显然的模式，下一项完全违背那个模式，然后其余的项又都服从前面那个模式。[2] 巴贝奇反复阐明了这个事实，还描述了生成如此数列的计算机程序。他觉得这样的论证也许解释了世间奇迹的起源，因为世界原本是由简单而有序的自然规律决定的。上帝就是那复杂而高超的程序设计师。

2 例如，考虑

$$f(n) = n\prod_{i=1}^{a}(n-i)\prod_{j=a+2}^{\infty}(j-n)$$

其中 $a = 100\,000\,000$（举例），于是对除 $n_0 = 100\,000\,001$ 外的所有正整数 n，$f(n) = n$，而 $f(n_0) = \infty$。（原注）

希尔（Hill）请大家注意另一个数学例证，巴贝奇也解释为奇迹的来源——那是从满足曲线方程的孤立点产生的。例如，图 34 的曲线的所有点都满足方程

$$y^2 = (x-2)^2(x-3)$$

孤立点(2，0)也满足方程。假如我们用归纳法求曲线方程，也许不会把孤立点包括进来，虽然从曲线上的点来看，它像一个孤立的奇迹，但无论如何它还是严格地服从曲线的法则的。

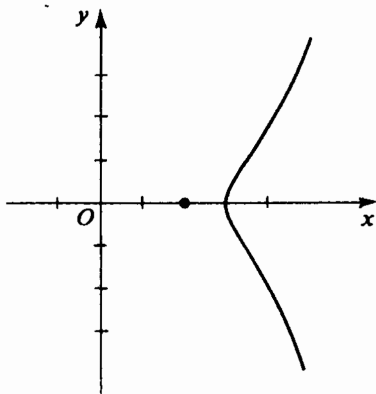


图 34

279° 科学的牛虻

诚然，多次的失败令巴贝奇很痛苦，激发他写文章来抨击这样那样的事情。但应该承认，尽管他的某些批判有点儿偏激，他的立场一般说来还是有道理的，也赢得了众多的支持。

巴贝奇最恼火的是皇家学会对英国科学的漠不关心,他提出了一揽子改革学会的计划。例如,他建议会员考核应包括科学论文的发表,学会选举应走民主程序,学会政策应自由争论。学会未经讨论就拒绝了他的建议。学会的态度激怒了巴贝奇,他说皇家学会理事会是“那样一群人,他们互相投票做会员,花学会的钱大吃大喝,在酒桌上互相吹捧,互相颁发奖章。”

巴贝奇在格林尼治皇家天文台发现了类似的状况。几本天文观测他都没能要来，但后来他偶然在一家商店看到了5吨数据，是买来做纸板的。巴贝奇评论说，“皇家天文学家当然最能决定用他们的出版物来做什么。但是，建立一个天文台和计算中心，就是为了用它制造的天文数据表来做废纸，恐怕再也找不到比这更夸张的回报社会的方式了。”也许我们用不着在这儿对官僚体制的无谓浪费做更多的评论。

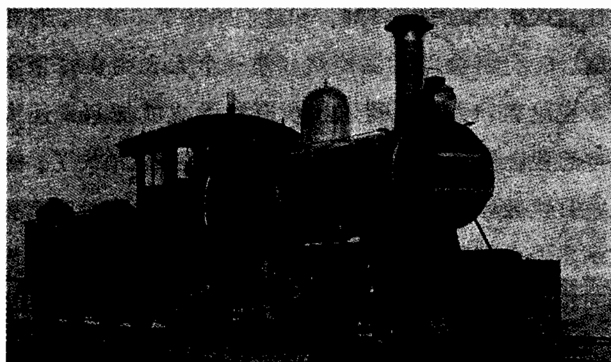
280° 铁路排障器与电报

在一个大型晚宴上，巴贝奇和几个新建铁路的官员也在场，谈话自然落到新的铁路旅行，特别是它的某些麻烦和危险。大家认为，其中最危险的就是铁轨上的障碍，不论偶然落下的还是蓄意安放的，都可能带来致命的后果，为它付出高昂的代价。为了避免这些灾难，巴贝奇提出两个可能的解决方法：

(1) 每辆机车的前轮前方应该装置一个强大的支架，支撑一块坚固的铁板，从铁轨上方一两英寸倾斜下来。这些铁板与轨道和地面都呈45°角，形状就像一个犁头。它们的作用就是清除铁轨上的障碍物。

(2) 每辆机车前放一块皮革挡板，固定在一根坚固的铁棒上，凸出机车五六英尺，高出路基一英尺左右。它的作用是把迷失在铁轨上的动物拦在挡板里，虽然可能折断动物的双腿，但不致给火车运行造成阻碍。如果用在封闭的路上，它还可能挽救那些粗心大意的人，虽然也许会把手脚折断。

一天，巴贝奇在酒席上坐在伦敦一个著名银行家的旁边。话题又扯到新兴的铁路系统，多数都说它的好处。但银行家似乎不大赞成。最后巴贝奇问他有什么看法。“哦，”银行家说，“我不赞同这种新的旅行方式。它倒方便了职员偷我们的东西，然后以每小时20英里的速度沿着去美国的路跑到利物浦。”巴贝奇告诉他，科学也许能替他解忧，“也许我们能赶在那贼到达利物浦之前先把闪电发送出去，这就保证铁路能抓住盗贼。”巴贝奇说这些话时，不会想到那闪电的电报很快就能实现了。



大清铁路的火车头

281° 易读的数学用表

巴贝奇的《对数表》1826 年在伦敦出版。在准备这些表的第一版时，为了使表清晰醒目，巴贝奇和印刷工人们第一次系统而广泛地考虑了各种可能因素。在前言里，巴贝奇从类型的数量和安排以及纸张的色彩和质地对研究和实验进行了总结。

后来，1831 年，为了使表更方便检阅，巴贝奇将他 21 卷对数表的部分页码单独印刷成册，151 页，用了 10 种不同颜色的墨水（淡蓝、深蓝、淡绿、深绿、橄榄色、黄色、浅红、深红、紫色和黑色），还用金、银和铜等金属光泽的字印在牛皮纸和不同厚度的纸上。

今天的人们也许不能很好理解手工排字年代里作者与印刷者之间的协作，印刷的艺术成分已经在轻而易举的生产过程中丧失殆尽了。

282° 手风琴师

痛苦而厌世的德国哲学家叔本华（Arthur Schopenhauer，1788～1860）特别痛恨车夫和他们挥舞马鞭的噼啪声。同样，巴贝奇无比讨厌街头的手风琴师，和他们争斗了一辈子。他把他们告上法庭，一有机会就辱骂他们。他一个人和街头音乐家的斗争，至少在伦敦，为他赢得了比所有科学成就加起来还大的名声。他抱怨说，风琴声一响，他的创造性思想就消失了。他计算过，这些打扰破坏了他四分之一的工作效率。一个地方官曾问他人的大脑是否会因为听手风琴而衰退，巴贝奇回答说，“当然不会，原因很简单，听过街头手风琴的人都没有大脑。”据说，巴贝奇是他那个时代的数学泰门（Timon），因为他憎恨人类，特

别是英国人，尤其是街头风琴师。[3]

巴贝奇的斗争，在有些人眼里算不得什么大事，从 1871 年伦敦《泰晤士报》的巴贝奇讣告就能看出来。讣告说，巴贝奇几乎活了 80 岁，"尽管深受街头风琴师的折磨"。

3 泰门是公元前 5 世纪雅典的一个憎恶人类的人。莎士比亚有出以他为主角的戏《雅典的泰门》。

几个姓"B"的数学家

283° 泰恩对贝尔的一本书的评论

1951 年的一个星期天，《帕萨迪纳星新闻》（*Pasadena Star-News*）在书评专栏发表了一篇热情的文章，评论贝尔（1883 ~ 1960，那时是加州理工学院著名数学家）的新书《数学，科学的皇后和仆人》。泰恩（John Taine）的这篇书评写道，"书套背后说，贝尔'也许是数学的最伟大解说者'，笔者很熟悉作者，对此深有同感。"

泰恩当然应该熟悉作者的，因为他就是贝尔。"约翰·泰恩"是贝尔在 20 世纪二三十年代写他成功的科幻小说时用过的笔名。[4]

4 例如，《时间的溪流》、《伟大的历险》、《蓝宝石》和《百合花》，都由多佛出版公司出版。（原注）

284° 纪念三个苹果

法卡斯（Farkas，拉丁文为 Wolfgangus，德文为 Wolfgang）·博莱（Bolyai，1775 ~ 1856）从 1796 年到 1799 年在哥廷根大学学习了三年，成了同学高斯的亲密朋友。两人常在一起，交流数学思想，结伴长途漫游。今天我们记得法卡斯，特别是因为他有一个儿子雅诺斯（Janos Bolyai），是最早发现一种非欧几何的人之一。法卡斯是马洛斯－瓦萨赫利（Maros-Vasarhely）学院的数学、物理学和化学教授，写过大量基础数学的论文。实际上，

正是在法卡斯著作的一个附录里，发表了他儿子的非欧几何思想，无疑也是他第一个让儿子对欧几里得的平行公设发生了兴趣。

法卡斯有两句话广为流传。第一句是他对高斯的赞美，称高斯是"数学的巨人，从高高的苍穹之上，看尽群星和渊薮"。第二句是他谦逊的要求：他的坟墓不需要纪念碑，只要一棵苹果树，纪念三个苹果：夏娃和亚当的两个，使大地沦为地狱；牛顿的一个，使大地重新上升为天堂的一员。

285° 数学家、小提琴手、剑客

雅诺斯·博莱（1802～1860）是法卡斯的著名的儿子，非欧几何的发现者之一，原来学军事，后来大家知道他是富有创造力的数学家、充满激情的小提琴手和技艺高超的击剑手。据说，他在军营和骑兵军官们一起，接受了一个挑战，同 13 名军官决斗，每决斗一个，他就可以用他的小提琴演奏一曲。故事说，13 场决斗他都赢了。

美国数学家霍尔斯特德（George Bruce Halsted，1853～1922）宣称雅诺斯的《绝对空间的科学》是"思想史上最不同凡响的二十几页"。这本小册子包括了雅诺斯发表过的非欧几何的论文，1832 年发表在他父亲关于基础数学的半哲学著作的一个附录中。尽管雅诺斯的思想到 1832 年才发表，但早在 1823 年他就开始认识了那个新几何的真正本质，他在给父亲的一封信中宣布，"我从虚无创生了一个新宇宙！"

286° 欧几里得的疗效

波尔查诺（Bernhard Bolzano，1781～1848），一个愁眉不展

的捷克斯洛伐克牧师，一个被人遗忘的数学家，讲过一个关于他自己的小故事，在故事中，欧几里得成了一个医生。波尔查诺在布拉格度假时患了病，浑身打颤，痛苦不堪。为了振作起来，他拿起一本欧几里得的《原本》，第一次读了第五卷里关于比和比例的欧多克斯理论的巧妙解说。他说，这种灵巧的方法令他满心欢喜，身体立刻就感觉好了。

287° 早熟的数学家

纳桑尼尔·鲍迪奇（Nathanieal Bowditch，1773 ~ 1838）是自学成才的数学家，凭高度实用的《新美洲实用航海》（1802）和出色的拉普拉斯《天体力学》译本（出版于 1829 ~ 1839 年间）赢得了国际声誉。为了读牛顿的《原理》，他 17 岁就开始认真研读拉丁文，后来又掌握了法文、意大利文和德文，就是为了学习用那些文字写的数学。

下面的故事说明了纳桑尼尔在数学上的早熟。小孩儿时，纳桑尼尔就进了沃森（Master Wotson）的一所学校。一天，沃森在大孩子的题板上写了一道很长的算术题，纳桑尼尔也想算，但老师说他太小了。那天晚上，他向父母抱怨，父母于是给沃森写了张便条，替儿子说话。第二天，恼怒的沃森在纳桑尼尔的题板上写了一道极长的算术题，“好了，它能让你忙会儿了。”纳桑尼尔很快就算好了，还仔细检查了一遍，然后问要新的题目。

“太难了，是吧？”沃森嘲弄地转过来。“不，你不能做别的题。等你把这道题做好了再说。”

“可我已经有答案了呀。”孩子回答。

“什么？谁帮你的？”

“没人帮我。”

沃森把手重重拍在桌上，“别对我撒谎！谁帮你的？”

纳桑尼尔坚决否认有人帮了他，假如第二天孩子还不说真话，就要挨打了。晚上，受了惊吓的孩子把事情原委告诉了家里。第二天，哥哥哈巴库克（Habakkuk）和他一起来到学校，向沃森解释纳桑尼尔确实是自己解决了那个问题。

“没人帮忙他绝不可能那么快就把问题解决了！谁也不能令我相信是他做的。”沃森告诫说。

“您干吗不给他另出一道题，站在旁边看着他做呢？”哈巴库克建议。

沃森听从了建议，怀着一生从未有过的惊奇看着纳桑尼尔飞快地解答他给的问题，而且还仔细检查了一遍。

“纳桑尼尔，”他说，“假如你的拉丁文能有数学的一半那么好，明天你就可以进哈佛了。”

288° 对船的兴趣

纳桑尼尔不仅算术早熟，而且很早就对船和航海发生了兴趣。一天，沃森问小纳桑尼尔，“1775 年 4 月 19 日发生了什么事情？”这当然指的是重要的莱克星顿(Lexington)战斗的那一天。

“1775 年 4 月 19 日那天，”纳桑尼尔回答，一脸的天真，“我爸爸的小帆船环行了安圭拉岛。”

289° 警告

那时，大学教授似乎远比学生更有责任心。学生随便找借口旷课，而教授宁愿忍受着病痛和穷困，也不愿落下一节课。责任心也给布尔（George Boole，1815 ~ 1864）的一生带来了危险，他在创造的劳动中断送了生命。1864 年的一天，他冒着瓢泼大

雨，从居所走过两英里来到他教书的学院（爱尔兰科克女王学院），穿着湿透的衣服讲课。结果，他得了肺炎，12 月 8 日，50 岁的他走到了生命尽头。

1901 年，罗素写道，"纯数学是布尔在他的一本名叫《思想规律》的书中发现的……他的著作是讲形式逻辑的，而那和数学是一样的东西。"正是布尔早先的符号逻辑的书，1910 年在怀特海和罗素的巨著《数学原理》中开花结果了。

290° 概率引出的 π

法国博物学家布丰（Comet de Buffon）因为两点贡献让数学家们熟悉了——一个是牛顿《流数法》的法文译本，一个是他 1777 年在著名的多卷本《自然史》（*Histoire naturelle*）的补编第四卷附录中发表的伦理的算术（"Essai d'arithetique morale"）。

在论文里，布丰提出了几何概率的新领域。布丰举了一个著名的"针问题"做例子，通过这个问题，π 可以用概率方法导出来。在平面上画一组间隔为 d 的平行线（图 35），假定让一根均匀的长度为 $l < d$ 的针随机落在平面上，布丰证明，针落下来与平行线相交的概率为[5]

$$p = 2l/\pi d$$

多次重复这个实验，记下成功的次数，就得到概率 p 的经验值，然后根据上面的公式就可以计算 π。这种方式的最佳结果是意大利人拉泽里尼（Lazzerini）在 1901 年得到的。只把针扔了 3408 次，他就得到 π 小数点后面的 6 位！他的结果远远好过其他实验结果，以致曾遭到某些人的怀疑。

还有其他计算 π 的概率方法。例如，假如随机写下两个正整数，则它们互质的概率为 $6/\pi^2$。查特雷斯（R. Chartres）在

5 假如一个事件能以 h 种方式发生，而以 f 种方式不发生，而这 $h+f$ 种方式的每一种是同样可能发生的，则事件发生的数学概率为 $p = h/(h+f)$。

1904 年报告了这个事实的一个应用。

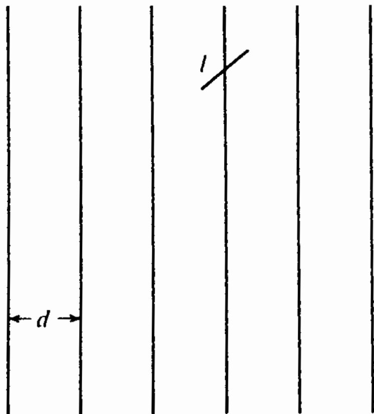


图 35

卡莱尔和勒让得

291° 卡莱尔二次方程的几何解

苏格兰著名文学家卡莱尔（Thomas Carlyle, 1795 ~ 1881）早年想当数学老师，后来开始讨厌那种工作，曾痛苦地说，“教书不过是另一种必然的而且来得不慢的毁灭。”但他在放弃教书之前，还是在初等数学的历史上留下了两个印迹：一个是影响深远的勒让得《几何基础》（*Élements de géometrie*）的英译本，我们在下面的故事里说；另一个更小一点的贡献是发现了二次方程的一种非常灵巧的几何解。这个解出现在某一版的莱斯利（John Leslie）的《几何基础》中，评注说，“现在写进课文的这个问题的解，是托马斯·卡莱尔先生告诉我的，他是个天才的数学家，我从前的学生。”

用现代的形式说，卡莱尔的二次方程几何解可以解释如下：设有二次方程 $x^2 - gx + h = 0$，在笛卡儿直角坐标系中定点 $B(0, 1)$ 和 $Q(g, h)$。以 BQ 为直径画圆，与 x 轴交于 M 和 N。于是 OM 和 ON 的带符号的长度代表了给定二次方程的两个（实数）根。读者也许愿意找出这个解法的证明。图 36 画的是将方法用于特定二次方程 $x^2 + x - 6 = 0$（即 $g = -1, h = -6$）。作为简单应用，读者可以考虑 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 和 $x^2 + 4x - 21 = 0$。

发现卡莱尔数学才能的是爱丁堡大学的莱斯利教授，他尽了全力来帮助这个学生。卡莱尔也总是念念不忘莱斯利教授的恩情。他曾写道，他在数学上的进步“主要是因为偶然遇上了莱斯利那样有才干的教授，是他唤起了我的一点儿热情。几年来，几何在我面前闪光，仿佛所有科学中最壮丽的，我总在最好的时光怀着最惬意的心情来做它。”卡莱尔在数学班里获得过“Dux”（“最优成绩”）奖，证明了他做数学学生的成功。

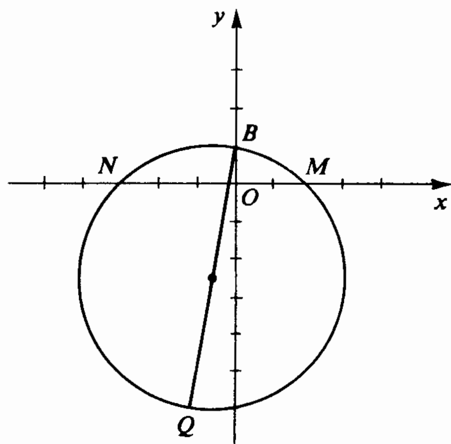


图 36

在罗德岛普罗维登斯（Providence）布朗大学图书馆有一本辛普森（Thomas Simpson）的《流数理论及其应用》（1776），在扉

页的顶部有一个优美的手写签名："Thomas Carlyle, Studt. Edinb. 1814"。

292° 勒让得、卡莱尔和美国

勒让得(A. M. Legendre, 1752 ~ 1833)出生在法国图卢兹，他在初等数学史上的名声主要源于他那本普及而影响深远的《几何基础》。他改进了欧几里得《原本》的讲授方法，简化并重新编排了许多命题。他在高等数学的主要工作集中在数论、椭圆函数和最小二乘法。他还是数学用表的辛勤计算者。

勒让得的《几何基础》在欧洲大陆赢得了推崇，在美国更是大受欢迎，成为全国初等几何教科书的蓝本。它的第一个英译本出现在美国，是哈佛大学法拉尔（John Farrar）在 1819 年完成的。第二个英译本是苏格兰著名文学家卡莱尔在 1822 年完成的，他早先当过数学教师。卡莱尔的译本后来经过了戴维斯（Charles Davies）和更后来的阿姆林格（J. H. Van Amringe）的修订，超过了 33 个美国译本。卡莱尔之后还有其他译本出现。

在美国过去几代的中学老师和同学，也许很少有人意识到为什么我们的几何课本在命题的证明和次序编排上大不同于欧几里得的《原本》。勒让得和卡莱尔极大影响了美国的几何教学。他们的影响只是到了最近，才因为新写作团体的教学材料而发生了一定的改变。

数学家和自然爱好者

现在，请允许我走出汇编数学家轶事的角色，表现我更多的个性。我从年轻时就密切往来于两个特殊的学者群——植物学家

（或更广泛的自然爱好者）与数学家，逐渐发现两个群体之间存在着普遍的不同，而且在这些年得到了证明。植物学家通常最容易与人愉快相处，他们温和谦逊，思想开放，喜欢与人为伴，在同行中寻求善意的批评，在外行朋友中发现新的乐趣。数学家却不那么好处，他们张扬自我，固执己见，同行间常发生争吵，相互说别人坏话，在外行的熟人眼里很令人厌烦。

数学家的这些令人不快的特征，甚至表现在某些有数学天赋的中学生身上，更突出地表现在大学的数学研究生身上，而且常使数学老师和教授们大失体面。我敢说，学术史揭露的痛苦无聊的争吵，在数学圈比在其他任何学术圈子里都更多。

30 多年前，我在哈佛读数学研究生，有个亲密的颇有贤者风度的朋友，我常和他聊天散步。有次散步我问他，“告诉我，为什么植物学家那么好处而数学家却那么难?”我不记得他当时怎么回答的，但几年前的一个夏天我们在分隔 30 年后重逢了。令我惊讶的是，我那朋友唤起了多年前的那个问题，我就问他有没有找到答案。下面是他的部分回答：

“今天的数学研究的骨子里有一种令人自负的东西。别误会，我不是说所有数学家都自负。我说的是数学研究，特别是高级的研究，多少能激发我们所有的人生来就有的那些潜在的、下意识的自负神经——例如，它要的是分析和抽象的天才，过人的才智，辉煌的成就，以及几乎无所不能的创造新概念的能力，另外也许还有本学科所具有的形成我们技术文明的非凡力量。”

至于植物学家，这样一个与自然的复杂和神秘亲密接触的群体，似乎更可能培养谦逊、敬畏和超脱的精神。

293° 疯人院

克罗内克（Leopold Kronecker）和康托（George Cantor，1845～1918）就真无穷大和潜无穷大的争吵，让我们痛苦地看清了数学家中间的那种令人不快的品性。康托是集合论和超穷数研究的创始者，克罗内克作为一个坚定的有限论者，竭力向数学界证明，尽管康托的研究也许可以看做神秘主义或神学，但肯定不是数学。

两个对头的论战功夫悬殊太大，克罗内克是口战的高手，而康托不善言辞。尽管克罗内克对康托的仇视有一定的科学基础，但常常沦为人身攻击的漫骂。在那样的攻击下，懦弱而敏感的康托有时也开始怀疑自己。1884 年，他 40 岁那年的春天，他第一次精神崩溃了，以后就一直伴随着他的余生，不时地住进哈尔（Halle）的精神病医院。每次从医院出来，康托都发觉自己的思维格外敏捷，可新的崩溃接着又来了。1918 年，73 岁的康托在哈尔精神病医院去世。他的大部分职业生涯是在哈尔的一个初级学院教书，他梦想成为柏林大学的一个教授，可总被克罗内克的忌妒粉碎了。

克罗内克和康托的争论，演变成 20 世纪数学哲学的直觉主义与形式主义学派之间的对立。希尔伯特（形式主义学派的领袖）在捍卫康托时声名：“没人能把我们从康托为我们建造的乐园里赶出来。”历史将回荡康托的名言：“数学的精髓在于它的自由。”

294° 数学与神学

克罗内克攻击康托的研究是神学而非数学，也许有一定根

据。实际上，康托对中世纪神学很感兴趣，如果没成为数学家，他很可能在哲学或神学留下印迹。

数学哲学的形式主义学派的奠基人希尔伯特，希望通过建立内在的和谐将古典数学从直觉主义学派的攻击和破坏下解放出来。尽管可以根据游戏规则证明某些情形不可能在游戏中出现，但希尔伯特希望，通过适当的一套程序法则，证明在经典数学里不可能出现矛盾的结果。希尔伯特对很小一部分数学完成了那样的一致性证明，从而说明了他想为经典数学所做的事情，但对整个体系来说，发生了未曾预料的困难，一致性问题一直悬而未决。

事实上，希尔伯特的计划（至少在他原来构想的形式下）看来注定要失败的。1931 年，奥地利数学家和逻辑学家哥德尔（Kurt Gödel）带来了结果，他用形式主义和直觉主义两派都能接受的方法证明，对一个足够丰富的演绎系统，诸如希尔伯特那样的经典数学系统，不可能用系统内的方法来证明系统的一致性。这个惊人的结果是一个更基本的结果的推论；哥德尔证明了希尔伯特系统的不完备性——就是说，他证明了在那个系统内存在"不可决定的"问题，系统的一致性也属于那样一个问题。1956 年，德萨（F. De Sua）对整个问题做了优美的描述：

> 假如我们大致把宗教定义为依赖于某个基本信仰的任意学问，而与任何可能的理性元素无关，那么，在这样的定义下，量子力学就是一种宗教。而数学将处于一种独特的地位，它是惟一能严格证明自己应该属于什么的神学分支。

295° 遗失和遗忘的手稿

某些大数学家自以为是，往往不公正地无视或丢失请他们审阅的稿件，结果令人悲哀和泄气。例如，阿贝尔和伽罗瓦的划时代的论文就遭遇了这样的厄运。他们把论文寄给法国科学院，请求审查，但最终也没等来评价报告。论文被科学院选定的审稿人柯西束之高阁，最后丢失了。

柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789 ~ 1857）是很有创见的数学家，在纯数学和应用数学领域都写过大量而深刻的著作，作品数量可能仅次于欧拉。他对高等数学的无数贡献里包括无穷级数的收敛和发散、实函数和复变函数理论、微分方程、行列式、概率论和数学物理。

柯西是热情的波旁党人，1830 年革命之后，被迫放弃巴黎理工学校教授的职位，脱离工职 18 年。这段时间，他曾流亡都灵和布拉格，在巴黎的某些教堂学校教书。1848 年他未经宣誓效忠新政府，就被允许重返理工学校教授岗位。

纵观柯西一生，他是不知疲倦的劳动者，遗憾的是他心胸狭窄而自负，经常无视有前途的年轻人的有价值的研究。

296° 多能的数学家

关于英国大数学家凯莱（1821 ~ 1895），有无数有趣的话题。

1）凯莱的数学作品数量与柯西不相上下，都可能是仅次于欧拉的人。实际统计二人的出版物的数量，才能决定谁能赢得那个荣誉。

2）凯莱开始并不以数学为生，在接受剑桥萨多瑞（Sadleri-

an）教授之前做过 14 年的律师。但他总是小心翼翼做法律，免得它受数学兴趣的干扰。在 14 年律师期间，他发表了 200 多页的数学论文。

3）凯莱极爱读小说，旅游时读，开会前读，在任何零星的时间里读。他的一生读过几千部小说，不光英文，还有希腊文、法文、德文和意大利文。

4）凯莱是真正英国传统的登山爱好者，常去欧洲大陆登山和长途旅行。据说他讲过，他喜欢爬山的原因是，虽然登山艰辛而劳累，但征服一座山峰的愉悦就感觉像解决了一道数学难题或完成了一个复杂的数学理论。他还说，登山很容易获得那种快感。

5）1842 年，21 岁的凯莱从剑桥三一学院毕业，获得数学荣誉学位考试的优等成绩，同年，在更难的史密斯奖竞赛中名列第一。

6）凯莱喜欢画画，特别是水彩画，是一位出色的水彩画家。

7）1883 年，在英国科学促进会主席的就职演讲中，凯莱表达了如下的观点："很难确定地为现代数学划定一个疆域。'疆域'一词是不对的：我说的是一个充满了美妙风景的疆域——不是平淡无奇的大平原，而是远远浮现在眼前的美丽乡村，那儿的山坡和沟谷、溪流和岩石、森林和鲜花，都等着我们去探幽入微。但正如其他事物的美一样，数学的美也只能感觉而不能解释。"这些话不是学究式的空谈，而是真切反映了对自然的亲近。

8）凯莱在数学家中是最冷静和尖锐的，但他不光是数学家，他是数学家与自然爱好者的复合体。

297° 数学鉴赏家

克雷尔（August Leopold Crelle，1780～1856）是数学鉴赏家，而不是数学创造者。他的专业是土木工程师和建筑师，他建造了德国第一条铁路，挣了大钱。业余时间他以数学为乐。尽管写了大量数学论文，他对数学进步的最大贡献是他创办了 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*（《纯数学和应用数学杂志》）。这是世界第一个专门为数学研究而出版的期刊，自 1826 年至今，每年出四期。在第一次世界大战后的欧洲的混乱中，它步履蹒跚，差点儿就跌倒了，但读者不愿看到那样一个伟大的纪念碑倒下，它终于挺过来了。

克雷尔天生慧眼，能准确选择合作者，发现别人的数学才能。他就是那样的人，对在贫困中挣扎的阿贝尔，对其他年轻数学家，他都关怀备至。1825 年，阿贝尔来到柏林，克雷尔和他认识了，一起长谈数学。谈话中，阿贝尔指出了克雷尔最近几篇论文里的一个疏漏。克雷尔很大度，采纳了阿贝尔的意见，一点儿没生气：一个小小年轻人竟然自以为是地指摘他的过失。

克雷尔很快发现阿贝尔的数学远远超过了他，于是竭尽全力帮助这个年轻人。他到处给人引介阿贝尔，在他的杂志上发表了阿贝尔的许多论文。克雷尔的不懈努力，为阿贝尔最终赢得一个柏林大学的教授职位。可令人悲伤的是，好消息传到挪威时，阿贝尔已经去世两天了。

通过对年轻数学家的热情帮助，克雷尔一个人对 19 世纪的数学进步所起的作用，抵得上多个博学的大学老师。但克雷尔不是数学家，他是工程师和建筑师，一个默默为他人做嫁衣的数学爱好者。

克里弗德和道奇森

298° 强人与顽童

克里弗德（William Kingdon Clifford，1845～1879）是英国19世纪最有前途的数学家之一，但他年仅34岁就过早地死于肺病，还没来得及发挥他的天才。他有卓越的教师才能，是清晰的解说者，令人钦佩的演说家，轻松地掌握了几门外语。据说他在世时是英国惟一能向公众讲数学并让他们感觉听懂了的数学家。

克里弗德和同时的卡洛尔（Lewis Carroll，即 Charles Lutwidge Dodgson，牛津基督教堂的数学讲师）一样，喜欢逗小孩儿。他最大的乐趣是教小孩儿放风筝，和小孩儿聚会。为了逗小伙伴儿开心，他写了一本题目是《小人儿》的童话集。他还写了好多诗，只发表了一点儿。他把《小人儿》送给小说家爱略特（George Eliot）时，附了下面一首小诗：

小宝宝挥笔乱涂，
　　画了间歪斜的小屋；
妈妈看着弯曲的门
　　还有弯曲的窗户。

妈妈的心儿宽广无限，
　　握着人们的心眼；
和我们的心愿一同长大，
　　给它们再生的机缘。

听小儿呀呀说话，

　　不清楚也不聪明；

但那小儿的感觉，

　　正要你来倾听。

也许克里弗德最引人瞩目的是他非凡的力量。例如，他能随便用一只手引体向上。他还能在高处冷静地做一些惊险动作，例如用脚趾头悬在高高的教堂塔楼的风向标的交叉杠上。他的力量和同样勃发的活力，使他脆弱的健康超过了负荷，过早地结束了生命。

299° 绅士与顽童

道奇森（1832～1898）是著名的《爱丽思漫游奇境》和《爱丽思镜中奇遇》的作者，更出名的是他的笔名卡洛尔。他是英国数学家和逻辑学家，在牛津基督教堂做讲师。从文学熟悉卡洛尔的许多人并不知道数学家的道奇森，更不知道他在数学领域出版过许多课本。有故事说，维多利亚女王很喜欢卡洛尔的爱丽思，派了一个大臣去把他写的所有书都找来，结果带回一堆数学，可怜的女王只好望书兴叹了。

道奇森将“没有意思的书”推向了巅峰，他的文学读物里很多地方明显套用了逻辑的三段论演绎法。有证据表明，爱丽思在漫游中的尺寸改变构成一个封闭的射影变换的集合，而《镜中奇遇》无疑是根据象棋残局来写的。

道奇森的个性与克里弗德实在差别太大。克里弗德喜欢交往，能说会道；道奇森腼腆害羞，老受口吃的折磨。也许至少部分是因为口吃的原因，道奇森才走近了孩子们，特别是小姑娘，

和他们在一起他才感觉轻松自在。他成了杰出的儿童摄影家。

不过，道奇森也和克里弗德一样，喜欢和小朋友一起玩儿。有一次在伦敦，一间屋子里正举行儿童聚会，巧的是隔壁有一个大人的聚会。为了逗孩子们开心，道奇森决定爬着进会场，遗憾的是他爬进了隔壁的客厅。

道奇森的温和表现在他对动物的友好。朋友的小狗死了，他写了下面的文字来安慰他：

> 听到你的噩耗我很遗憾。好了，多年来，你已经让上帝的一个生命度过了非常幸福的生活——这是值得记忆的快乐事情。

数学老师也许记得《爱丽思漫游奇境》里的假甲鱼，它在学校的“必修课”，除了其他而外，还包括“算术的不同分支——野心、娱乐、丑化和嘲笑”。[6] 所有设计难题的人都收藏有卡洛尔的两本书:《枕头问题》和《乱事如麻》(*A Tangled Story*)。[7]

计算奇人

偶尔会出现些有着惊人的心算能力的青少年。给几个大数，这些小伙子能很快把它们乘出来，能乘方、开方，有时还能找出它们的因子。有的人还能很快回答与复利、养老金和日历有关的问题。在多数情形，这些人都没受过正规教育，而是靠自己发明的法则来计算。当然，也有些专业数学家在一生的某个时候表现很强的心算能力。例如，人们相信高斯和欧拉就是例子。数学物理学家安培（Andre Marie Ampere）小时候就学过心算。牛顿的

6 这儿说的是原书第九章的情节。假甲鱼说的几个“算术分支”原文为“Ambition, Distraction, Uglification, Derision”，显然是从“加减乘除”(“addition, subtraction, multiplication, division”)变来的。它的其他几门功课是“Mystery, ancient and modern, Seaography, Drawling, Stretching, Fainting in Coils”，是从“历史(古代和现代)、地理、绘画、素描和油画”衍生出来的。特别是，后面几门绘画的功课据说有点儿影射大艺术批评家鲁斯金(John Ruskin)。

7 两书合成一册，由多佛（Dover）出版公司重印。(原注)

前任、牛津大学萨维尔教授瓦利斯中年时也从心算找乐趣。这里我们只说几个自学的心算者，他们在青少年时代表现了惊人的计算本领，而后来并没成为专业的数学家。

300° 农场主的儿子

特别引人瞩目的是科尔本（Zerah Colburn），他1804年生在佛蒙特，一个小农场主的儿子，1840年才36岁就过早离开了人世。不到6岁，他就在一次美洲旅行中展示了非凡的计算才能。两年后，他被带到英国，做了多次表演。他能立即给出任意两个4位数的乘积。问他8的16次方是多少，他几秒钟就得到了正确答案：281 474 976 710 656。他飞快地计算2，3，…，9的10次方，记录答案的裁判连记录都赶不上他。他能在瞬间给出一个大数的平方根和立方根（答案为整数的情形）——例如106 929的平方根和268 336 125的立方根。最令人惊讶的是他能找出数的因子。问他247 483的因子，他回答是941和263；问他171 395，他回答5，7，59和83；问他36 083，他回答说没有因子。在观众中间他像一个小丑，问他要多少黑豆才能做出三颗白豆，他当即回答，"三颗，只要你把皮剥了。"人们怀疑这也许是预先安排的表演。他去世前写了自传，解释了他用过的一些方法。[8]

8 速算也许靠天才，不过在很多时候，它都不神秘，知识的力量更大。华罗庚先生讲过一个例子：教授要同学把一个871位的数字开97次方，他还没把数字写完，同学就知道了答案，说，"您写出8位数时，答案就已经有了。"

301° 泥瓦匠的儿子

在最有趣的计算天才里，有一个是乔治·比德尔（George Parker Bidder），1806年生在英格兰德文郡（Devonshire），父亲是那儿的泥瓦匠。他1878年去世，一生都保持着旺盛的精力，比任何人都更好地解释了他的方法。

9 岁时，乔治在当地已经小有名气了，父亲觉得带他到乡村外面去表现他的才能，还可以挣钱。13 岁时，他能立即回答复利和养老金的计算问题。有一次，他和科尔本比赛，结果证明他更能算。不过，对发现数的因子他不像科尔本那么出色。

下面说几个比德尔表演时被问到的问题。9 岁时，人们问他，假如月亮离地球 123 256 英里，声音每分钟传播 4 英里，那么月球的居民要过多长时间才能听到滑铁卢战斗？答案是 21 天 9 小时 34 分，他不到一分钟就答出来了。10 岁时，问他，假如 30 只苹果能做 1 夸脱果酒，百万只苹果能做多少桶？他 35 秒得到答案：132 桶 17 加仑 1 夸脱，另剩 10 只苹果。假如车轮周长为 5 英尺 10 英寸，那么跑过 800 000 000 英里，它要转多少圈？他 50 秒得到答案：724 114 285 704 圈，还多出 20 英尺。119 550 669 121的平方根是多少？他 30 秒得到答案：345 761。11 岁时，天文学家赫歇尔问他：太阳距离我们 98 000 000 英里，光从太阳到地球要 8 分钟，如果光从最近的恒星到地球要 6 年零 4 个月，假定一年 365 天零 6 小时，一月 28 天，那么恒星的距离是多少？答案是 40 633 740 000 000 英里。12 岁时，问他：如果钟摆每秒摆动 9（3/4）英寸，那么它 7 年零 14 天 2 小时 1 分 56 秒摆动多少英寸？不到 1 分钟，他就得到答案：2 165 625 744（3/4）英寸。13 岁时，问他：找一个数，其立方减去 19 乘以其立方应等于 6 的立方，他脱口回答：3。如果你现在在 14 岁，再活 50 岁，每天花半个克朗，那么一生要花多少铜币？他 15 秒回答：2 805 120。

和科尔本一样，比德尔也遇到过一些刁钻的问题，不过他也和科尔本一样，能很好应付过去。在 1818 年的一次表演中，有人问他，需要多少根牛尾巴才能到月亮？他应声回答，“一根，

只要足够长。”

比德尔家族里还有些成员也有类似的天赋。乔治有个哥哥是保险统计员，他的书被烧了，靠记忆用六个月时间把它们重新写了出来。据说后来因脑炎死了。另一个哥哥记得整部《圣经》，能说出任意一行句子所在的章节。乔治的大儿子（后来成了律师）能心算两个 15 位数的乘法，但速度和准确度赶不上父亲。比德尔家族的这些人都有非凡的记忆力。我们在乔治身上可以看到一个例子。1816 年，有人倒着向他读了一个数字，他立刻就顺着写出来了。一个小时后，人家问他是否还记得那个数，他马上重复了一遍。那个数是

2 563 721 987 653 461 598 746 231 905 607 541 128 975 231

302° 闪电计算机

戴斯（Zacharias Dase）1824 年生于汉堡，1861 年去世，才 37 岁。他也许是有史以来最奇特的心算者。在他的表演中，突出的是 54 秒计算两个 8 位数的乘法，6 分钟计算两个 20 位数的乘法，40 分钟计算两个 40 位数的乘法，8 小时 45 分计算两个 100 位数的乘法。他还在 52 分钟里计算一个 100 位数的平方根。1844 年，他用下面的格里戈利公式算到了 π 的 200 位小数：

$$\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$$

戴斯还发挥他的力量，计算了 7 位自然对数表和 6 000 000 到 9 000 000 之间所有数的因子表。

和所有计算奇人一样，戴斯也有很强的记忆力，表演几个小时后他还能重复计算中的所有数字。只看一眼，他就能说出书柜里有多少书，羊群有多少只羊（多到 30 左右）。有一次，他面前摆起多米诺骨牌，他看了一秒就说出共有 117 块。还有一次，

问他某一行印了多少字母，他立刻就说出了正确的数字：63。

戴斯的非凡才能没有跳出数字的圈子。尽管他接受过良好的教育，也有机会施展他的非凡才能，他却没有什么进步。他一生都不懂几何，也不懂德文之外的其他语言。多数人都说他愚钝。

德 摩 根

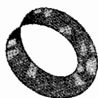


德摩根（1806～1871）虽然生在印度（父亲与东印度公司有关），却在英国长大、读书，以荣誉学位考试第四等的成绩毕业于剑桥三一学院。他拒绝了必需的宗教测验，失去了进剑桥或牛津的资格。结果，22 岁时他被任命为新成立的伦敦大学数学教授。他一直在那儿，只是因为学术自由被侵害，有过几次短时间的辞职。他是宗教和学术自由的热忱拥护者，也是有非凡才能的作家。他爱解难题，喜欢数学和科学的珍本图书，汇集了一本《悖论集》，是对“伪数学家”的讽刺，在他去世后由夫人编辑出版。人们普遍相信，如果德摩根没有那么多兴趣，而是专注于几个领域，他对数学会有更多更深刻的贡献，不过那样他也不会成为如此有趣的人了。他有大量的妙语和真知灼见，是数学家中被引用言论最多的一个。

303° 一只眼

德摩根的一只眼睛生来就瞎了，为这一点，他遭到过同学的许多冷酷的恶作剧。这大概也是德摩根从小不爱参加运动的主要原因。后来，他在大学也不运动，而是选择了长笛来娱乐，而且吹得很棒。

有些心理学家认为，人对距离和空间维度的感觉要靠两只眼



睛，德摩根证实，他相信他凭一只眼睛感知距离和空间，与正常的靠两只眼睛看的人一样好。

304° 热情的拥护者和伟大的老师

牛津和剑桥靠神学测试来维护自己，犹太人和反对英国国教的人不能在学校就职。于是，思想自由的一帮人决定知难而进，在伦敦创立一所宗教中立的大学。当时才22岁的德摩根被任命为新的伦敦大学（London University）数学教授。[9]

9 不要把 The University of London 与德摩根做教授的 London University 混淆了，它是政府为了给通过考试的人颁发学位（不需要住校）在10年后组建的。原来的伦敦大学加盟为新大学的师范学院，改称大学学院。（原注）

在新学校，管理委员会、教授评议会与学生团体的关系弄得很僵。结果，一个解剖学教授和他的学生们发生了争执。因为不满管理委员会对事件的处理，以德摩根为首的一大批教授辞职了。学校任命了新的数学教授，可不久他被意外地淹死了。于是，在老师中享有崇高声誉的德摩根又被请回原来的岗位。

创办伦敦大学的那群改革派差不多同时还建立了“有用知识传播学会”。学会的目标是通过杰出作者的廉价而清晰的作品，让人们能方便地接触科学和其他知识。德摩根成了学会最多产而有力的作者之一。学会出版了德摩根优秀的《微积分》和《便士小百科》（其中六分之一的文章是德摩根写的）。《便士小百科》的发行量可能和便士硬币一样多。

305° 伦敦数学会

德摩根有个儿子乔治（George），他的数学在大学学院和新的伦敦大学（University of London）都出了名。乔治和一个同道朋友酝酿在伦敦建立一个数学会，以便阅读和讨论数学论文。第一次会议在大学学院举行，德摩根当选为第一任主席，乔治为第一任秘书。这是伦敦数学会的发源。

306° 德摩根与保险业务员

德摩根曾向一个保险业务员解释，一定比例的人群在保险到期后还活着的几率有多大。解释中他引用了包含 π 的保险统计公式。问他 π 是什么，德摩根说它代表圆的周长与直径之比。这时候，他的一个熟人，已经仔细听了他的解释，打断说，“我亲爱的朋友，那一定是错觉。圆怎么会与一定时间活着的人数有关呢?”

307° 德摩根与分数线

为《大都会百科全书》（*Encyclopedia Metropolitana*）写函数的微积分时，德摩根建议用一根斜线（即“分数线”）来印分数。斯托克斯（G. G. Stokes）在1880年采纳了这个建议。凯莱写信给斯托克斯说，“我想‘分数线’很漂亮……你完全可以靠它去做保护印刷工人协会主席了。”

其实，分数线早在西班牙统治下的美洲就出现了。在《墨西哥公报》（*Gazetas de Mexico*，1784）第一页，瓦尔迪斯（Manuel Antonio Valdes）就用过类似现代积分符号的曲线，如 3 ∫ 4。1843年，康巴斯顿（Henri Cambuston）在加利福尼亚蒙特雷出版了一本算术小课本，用同样的曲线来写分数。

308° 德摩根语录

下面的语录说明了德摩根的见识和机智。

1 数学发明的动力不是推理，而是想象。

2 记住，即席演说的法则是，在讲稿准备之后、演讲开始之前，要完全把主题抛在脑后；思想会在不知不觉中活跃起来，

重新组合；但假如你那时还全神贯注在主题上，那它就不会活跃，而只能麻木。

3 化圆为方容易，要数学家圆滑很难。

4 我们知道，数学家关心逻辑不比逻辑学家关心数学更多。精确科学的双眼是数学和逻辑：数学派关闭了逻辑的眼睛，逻辑派关闭了数学的眼睛；每一派都相信用一只眼比用两只眼看得更清楚。[今天，这种残缺的认识已经弥补了。]

5 德国人的智力超群，但德国人的每个成果出来，都需要进行分解。它最可能是智力（I）与雪茄（T）的结合。肯定有 I_3T_1 和 I_2T_1；但更普遍的是 I_1T_3，也会出现 I_2T_{15} 和 I_1T_{20}。在很多情形还会出现形而上学（M），我认为如果没有 $b+c>2a$，就不会出现 $I_aT_bM_c$。

不过要小心，在分解三者的混合时，不要把 T 和 M 混淆了，人们猜想它们很可能是同构的。于是，$I_3T_3M_3$ 容易与 I_3T_6 混淆。如果要我说，那些把黑格尔、费希特等人列为康德的添加剂的人，已经把 T 想象为和 M 一样的了。

6 几何是把严格的逻辑用于空间和图形的那些不证自明的性质，因而不可能发生争论。但这门科学的严格走得更远，因为不论多么显然的性质，不经证明(如果能证明的话)是不能被认可的。于是问题变成用尽可能少的假设来证明所有的几何事实。

7 普通的积分只是微分的记忆……实现积分的不同技巧不是从已知向未知转化，而是从我们不能记忆的形式向能记忆的形式转化。

8 大跳蚤背上背着要咬它的小跳蚤，

小跳蚤背上背着更小的跳蚤，如此以至无穷，

大跳蚤也可以跳到更大跳蚤的背上，

更大的跳蚤同样还有更大，更大，更大的……

9 伪数学家（pseudomath）是那种像猴子用剃刀一样用数学的人。动物想学着主人的样子给自己刮胡子，但不知道该从哪个角度握刀，把喉咙割断了。可怜的动物啊，没有第二次试验的机会了！但伪数学家可以继续他的事业，宣称自己的胡须剔干净了，而整个世界却是毛茸茸的。

图文数学家（graphomath）是那些没有数学却想写数学家的人。[10]小说家是这样表现的：即使斯各特（Walter Scott）也不时因为越俎代庖而伤了手指。他的理想计算者拉姆齐（Davy Ramsay）“凭不朽的纳皮尔的骨头”发誓。[11]斯各特认为爱数学的人崇拜废墟：所以他们也那么做。

10 证明需要那种能给予也能接受的人……

> 一个盲人说，至于太阳，
> 我拿圣经起誓，敢说没有；
> 假如曾有太阳光耀，
> 他们早该把它证明。
> 他如何变得那么傻？
> 他不知道他看不见吗？
> 不是他。

10 参见《告别数学圈》（A256）。

11 “纳皮尔的骨头”参见《回归数学圈》后面的 RMH38。

爱因斯坦

爱因斯坦 1879 年出生在德国乌尔姆。1933 年，因为纳粹德国的变故，他接受了新泽西普林斯顿高等研究院的终身职位，1940 年成为美国公民，1955 年在普林斯顿去世。他的研究都在数学物理领域，说明了抽象数学与代表 20 世纪特征的科学理论

之间的密切联系。

爱因斯坦是一个腼腆而谦逊的人，洋溢着热情、真诚和幽默，在他身上有着无数的故事和传奇。多数故事都在表现他个性和气质里的矛盾——说明他既简单也深沉，既天真也复杂。

309° 爱因斯坦和帽子

爱因斯坦有名的是他那多少有些随意和不讲规矩的装束习惯。例如，据说在某些下雨的日子，他光脚穿着套鞋就出门到公众场合去了。

一个乌云密布的早晨，爱因斯坦正要走出普林斯顿的家，夫人让他戴顶帽子。爱因斯坦很少戴帽子，就拒绝了。

“可天要下雨了！”夫人提醒他。

“是吗？”我们的数学家回答说，“我的头发比帽子干得快。”

310° 爱因斯坦刚到美国的公开讲话

有一个故事说明了爱因斯坦有时是多么天真。他刚移居美国不久，就被请去普林斯顿大学给一群数学家讲话。他带着习惯性的局促和不安，说他没什么大家还不知道的东西可以讲了。人们百般劝说，他最后才答应讲一点张量分析，那是相对论的基本数学工具。演讲在数学系的费因楼举行，告示牌上贴出了一张小通知，说明演讲人、时间和地点。

演讲那天，普林斯顿大学校园停满了汽车，就像要举行普林斯顿与耶鲁的校际橄榄球赛，而大批人群却围着费因楼，想进入那儿的小礼堂。原来，贴在楼前的那张为感兴趣的数学家写的通知，被一些学生看到了，他们又告诉别的同学，同学又写信告诉家长，于是，家长来了，还顺便带来了亲朋好友。普林斯顿小城

的居民也都来了。每个人都想听伟人讲话。

爱因斯坦被引着穿过拥挤的人群，在小礼堂前排的一个位置上坐下来，等着引介。他回头看看周围，惊讶地看着兴奋的人们拼命往大厅里挤，不由得惊叹道："我从没想到这儿的美国人对张量分析那么感兴趣。"

311° 爱因斯坦和他的盲人朋友

这个故事说明了爱因斯坦是多么复杂。到普林斯顿不久，那儿的一个数学教授的夫人请他喝茶。爱因斯坦犹豫了一下，还是答应了。过了一会儿，女主人为能请来这样一个伟人激动不已，她兴奋地站起来，欢快地来到聚会中央，张开双臂让大家安静。她语无伦次地表达了她的兴奋和愉快，然后转身对爱因斯坦说，"爱因斯坦博士，我想您是否乐意用几个词向我的客人们解释一下什么是相对论?"

爱因斯坦毫不犹豫地站起来，讲了一个故事。他说，他想起有一天他和一个盲人朋友散步。那天很热，他转身对盲人朋友说，"我想有杯牛奶就好了。"

"杯，"盲人朋友回答，"我知道那是什么。可牛奶是什么呢?"

"哦，那是一种白色的液体。"爱因斯坦解释。

"哦，液体，我知道，"盲人说，"但什么又是白色呢?"

"哦，就是天鹅羽毛的颜色。"

"羽毛，我知道；可什么是天鹅呢?"

"天鹅是脖子弯弯的一种鸟。"

"脖子，我知道；可什么是弯呢?"

这时，爱因斯坦说，他已经没耐心了。他抓住朋友的胳膊，把它拉直，"喏，现在你的手臂是直的，"他说。然后，他把朋

友的手臂从肘部弯过来，“现在，它是弯的。”

“哦，”朋友说，“现在我知道牛奶是什么了。”

这时，茶桌旁的爱因斯坦坐了下来。

312° 爱因斯坦传奇

苹果从树上落下，打在牛顿的头上，给牛顿带来了万有引力思想。下面有一个类似的故事，目的是为了说明爱因斯坦的引力场思想是怎么来的。一天，爱因斯坦看到一个工人从高楼落下，毫发未伤地落在干草堆上。爱因斯坦问他，在下落的过程中他是否感觉有引力在拉他。听工人说没有什么拉力，爱因斯坦立即发现“引力”可以用观测者的参照系的加速度来取代。

313° 爱因斯坦语录

1 “常识，”爱因斯坦曾说，“不是别的，它不过就是你在18岁之前积淀在头脑里的偏见。”

2 他说，宗教思想是一种为了“找到什么地方没门”的努力。

3 在回答那些倾向把量子力学的概率诠释作为物理学的合理基础的人时，爱因斯坦说，“我不相信上帝会跟宇宙玩儿骰子。”

4 他曾总结自己对世界的一般看法，说，“上帝难以捉摸，但他不怀恶意。”

5 尽管世界可以通过理性来认识，但他坚持认为，接受一个理论的准则，归根结底是美学的。

6 关于科学真理的本质不同于数学真理，爱因斯坦说，“就数学定律涉及实在而言，它们是不确定的；而当它们确定时，则不涉及实在。”

几个姓“F”的人

314° 苦命的因子表

大的因子表在素数研究中很有价值。1659年，拉恩（J. H. Rahn）发表了24 000以下所有数的因子，作为一本代数书的附录。1668年，英国佩尔（John Pell）将表扩充到100 000。应瑞士－德国数学家兰伯特(J. H. Lambert)的要求,维也纳的一个叫菲克尔(Felkel)的老师又扩充计算了一个苦命的因子表。菲克尔表的第一卷计算了408 000内的因子，在奥地利皇家财政部的支持下出版于1776年。但订阅者很少，所以财政部把这一版的所有书都收回了，用那些纸来做杀戮土耳其人的弹药筒！

19世纪，在切尔纳克（Chernac）、布克哈特（Burckhardt）、克雷尔、格雷歇（Glaisher）和那位“闪电”算家戴斯的共同努力下，计算了10 000 000以内的数的因子，出版了10卷。不过，这方面的最大贡献是布拉格大学库里克（J. P. Kulik，1773～1863）计算的因子表。他尚未出版的手稿算到了100 000 000，是20年业余劳动的成果。最实用的因子表是美国数学家莱默尔（D. N. Lehmer，1867～1938）计算的，是编排精巧的一卷本，包括10 000 000以内的数。莱默尔还指出库里克的表包含了一些错误。

315° 费尔巴赫怎么了？

几何学家一般都认为所谓费尔巴赫定理无疑是现代三角形几何里最优美的定理之一。这个定理涉及5个重要的和三角形有关的圆。这5个圆分别是内圆（即三角形的内接圆）、3个外圆

（即与三角形的一边和另两边的延长线相切的圆）和一个9点圆（即通过三角形三边中点的圆）。[12]费尔巴赫定理说，对任意三角形，9点圆与内圆和三个外圆相切。

12 9点圆还通过了三个高的垂足以及三个平分垂心（三个高相交的点）与顶点连线的点。（原注）

说明这个定理的图（图37）很诱人，如果把它放大，做一个画框挂起来，就是中学几何教室墙面的优美装饰。

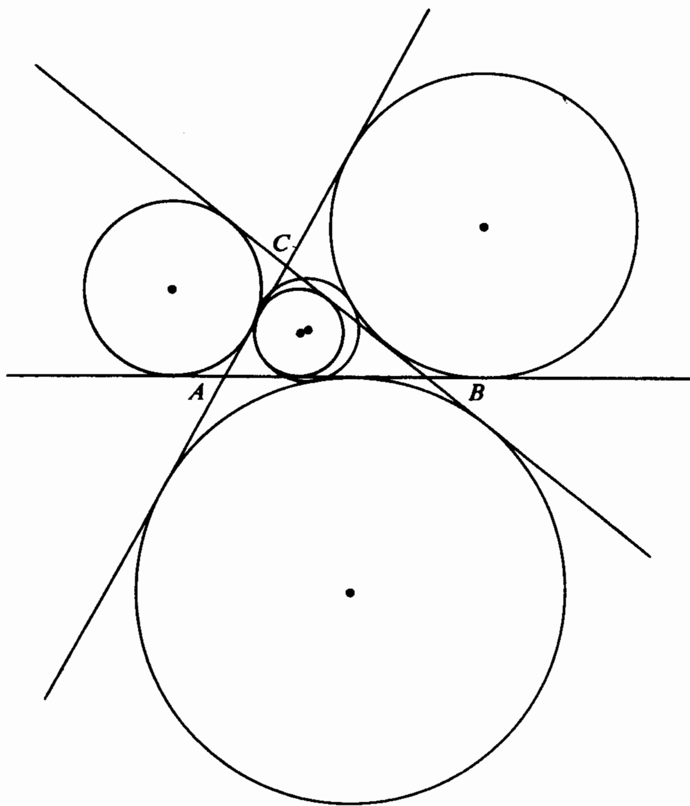


图37

定理首先由卡尔·费尔巴赫（Karl Wilhelm Feuerbach，1800～1834）在他1822年出版的一本小书里提出并证明。这是他在数学领域的惟一名声。他为什么没有更进一步呢？他怎么了？他

为什么 34 岁那么年轻就死了？这些问题的答案说来话长。

卡尔在家里是 11 个孩子中的老三，1800 年 5 月 30 日生于耶拿（Jena）。父亲是著名法理学家，1819 年成为昂斯巴赫（Ansbach）上诉法院院长。卡尔在爱尔兰根大学和弗赖堡大学学习，1822 年出版了包括那个优美定理的小书。他接受了爱尔兰根高级中学教授的职位，父亲和全家都为他骄傲。

后来有一天，在毫无警告的情况下，卡尔在去学校的路上被捕了。他和另外 19 个年轻人一起囚禁在慕尼黑的新塔楼内，几个月不能与外界联系。他们被捕的原因可能是，他们读大学时所属组织的活动出了政治问题。

身在囹圄中，卡尔的脑海里萦绕着一个念头：只有死才能解放他的热情。于是，有一天，他割断了脚上的血管，就在血流不止，快要死的时候，他被发现了，在昏迷中送到了医院。一天，他设法跑到走廊，然后从窗户跳出去。但他落在雪堆里，又没死成。不过，他还是被摔成了瘸子，走起路来就像一个问号。

医院历险过后不久，卡尔被假释出狱，由以前的老师（也是他家的朋友）监管。其他 19 个年轻人中，有一个死在狱中。14 个月后才宣判，他们都平反释放了。为了帮助这些年轻人回到正常人的生活，约瑟夫王（Maximilian Joseph）付出了艰辛的努力。

卡尔被聘为霍夫高级中学数学教授，但不久他精神崩溃了，被迫放弃教书。到 1828 年时，他恢复过来，又可以教书了，这次是回到了爱尔兰根的学校。然而，有一天，他在课堂上握着一把出鞘的剑，威胁说如果哪个同学不能解他写在黑板上的方程，就要砍掉他的头。因为这种疯狂失态的举动，他永远离开了课堂。他逐渐脱离了现实，不修边幅，蓬头垢面，两眼呆滞，嘟哝

一些莫名其妙的话。在爱尔兰根退休6年后，1834年3月12日，他安静地离开了这个世界。

316° 为热痴狂

傅里叶（Jean-Baptiste-Joseph Fourier）1768年3月21日生于法国奥塞尔（Auxerre），是一个裁缝的儿子。他8岁成了孤儿，被一个好心的夫人照顾，送进当地一所圣本笃会办的军事学校。12岁时，他为巴黎的一些教会头面人物写过布道文，想象自己成了牧师。结果，他却成了一个数学教师，先在一所中学，后来到了巴黎师范和理工学校。1798年，他积极加入了蒙日的队伍，参加了那场失败的拿破仑和埃及的战役。

关于傅里叶的学术贡献，今天最有名的是他1822年的《热的解析理论》(*Analytical Theory of Heat*)，是数学物理的一个里程碑。本书扩充了他10年前的思想，那时他的一篇关于热的数学理论的文章获得了科学奖。也就在这本书里，傅里叶提出几乎任何函数 $y=f(x)$ 都能用三角级数（即今天说的傅里叶级数）来表示。开尔文勋爵说它是“一首伟大的数学诗”。

傅里叶在埃及的经历，甚至包括他的热研究，使他养成一种奇怪的习惯。他相信沙漠的酷热是健康的理想条件。于是，他身穿几重长袍，住在难以忍受的高温房间里。有人认为，他对热的这种痴迷可能加速了他的死亡，而他死亡的直接原因是心脏病。1830年5月16日，60岁的他“熟透”了，死了。

傅里叶最常被人引用的句子也许是（出现在他早年关于热的数学理论的文章里）：“深入研究自然是数学发现最丰富的源泉。”

317° 富兰克林和数学

[下面的文字经允许引自小费尔德曼（Richard W. Feldmann, Jr.）的同名文章，发表在《数学教师》“历史记述”专栏，1959 年 2 月，125～127 页。]

尽管富兰克林（Benjamin Franklin, 1706～1790）是美国早期第一流的发明家和自然哲学家，却算不得伟大的数学家。他相信科学的惟一价值在于它的实践，其代表性言论是，“对我们来说，知道自然如何执行她的法则，也是没多大意义的。我们只要知道那些法则本身就足够了。真正有用的是知道瓷瓶悬在空中会落下来打碎，至于它如何落下，为什么打碎，是纯属想象的事情。知道它们很有乐趣，但不知道也能很好保存我们的瓷瓶。”

据富兰克林的《自传》，他 9 岁进了布劳内尔（George Brownell）先生的学校学写作和算术，“算术考试不及格，而且没有进步。”在哥哥的印刷厂做学徒时，富兰克林“轻而易举”地阅读了柯克尔的算术书和两本航海几何的书。[13]

13 “柯克尔的算术书”参见前面 227。

富兰克林博士发表的惟一数学文章出现在 1735 年 10 月 30 日的《宾州公报》(*Pennsylvania Gazette*)。在“数学的作用”里，他强调了实践的方面。他说算术为商人、店主和商贩服务，几何为建筑师、天文学家、地理学家、水手和土地测量员服务。文章最后概述了数学的古代史。

1749 年，为了在费城创办教育学院，富兰克林博士发表了《对宾州青年教育的建议》，提出了学院的课程。其中的数学只是“算术、记账和一些几何和天文学的基本原理”。在一个脚注中强调了记账，评论说，坚持记账是每个绅士的基本要求。

他的其他数学活动是在他 1750 年给英国柯林松（Peter Col-

linson）的两封信里发现的。第一封谈了幻方，就是在数的方阵中，每行每列和两个对角线上的数字之和都相等。在 n 行 n 列的方阵里，数字是从 1 到 n^2。富兰克林的信中有两个幻方，一个是 8 行 8 列，一个是 16 行 16 列。遗憾的是，根据钱德勒(Albert Chandler)在《富兰克林学会学报》[251（1951），415～422]的文章，在富兰克林《全集》的早期版本中，16－16 幻方被印刷工排错了。钱德勒提出了一个正确的幻方，如图 38。因为它具有

200	217	232	249	120	105	88	73	56	41	24	9	136	153	168	185
58	39	26	7	138	151	170	183	202	215	234	247	122	103	90	71
198	219	230	251	118	107	86	75	54	43	22	11	134	155	166	187
60	37	28	5	140	149	172	181	204	213	236	245	124	101	92	69
201	216	233	248	121	104	89	72	57	40	25	8	137	152	169	184
55	42	23	10	135	154	167	186	199	218	231	250	119	106	87	74
203	214	235	246	123	102	91	70	59	38	27	6	139	150	171	182
53	44	21	12	133	156	165	188	197	220	229	252	117	108	85	76
205	212	237	244	125	100	93	68	61	36	29	4	141	148	173	180
51	46	19	14	131	158	163	190	195	222	227	254	115	110	83	78
207	210	239	242	127	98	95	66	63	34	31	2	143	146	175	178
49	48	17	16	129	160	161	192	193	224	225	256	113	112	81	80
196	221	228	253	116	109	84	77	52	45	20	13	132	157	164	189
62	35	30	3	142	147	174	179	206	211	238	243	126	99	94	67
194	223	226	255	114	111	82	79	50	47	18	15	130	159	162	191
64	33	32	1	144	145	176	177	208	209	240	241	128	97	96	65

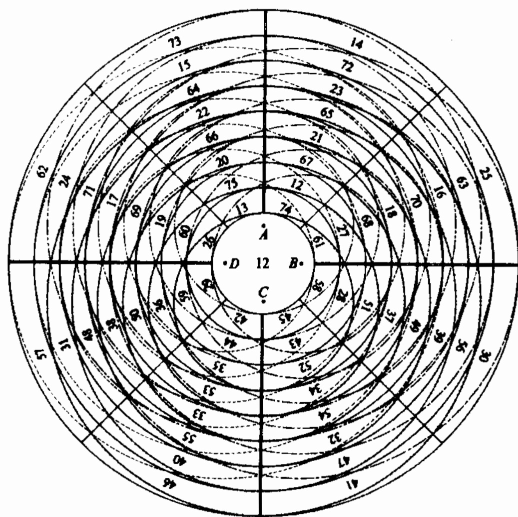
图 38

其他的性质，富兰克林称它是“任何魔术师所能做出的任何幻方中最最魔幻的”一个。图中所示的对角折线上的数字与行、列和两个主对角线有相同的和，即 2056。对角折线还可以从上到下、从左向右、从右向左移动（为了简明，图中没画左右移动）。任意 4－4 方阵的数字之和也是 2056。虽然他为自己的幻

方感到骄傲，但还是说他为构造幻方耗费的时间“本该用于更有用的事情”。

在第二封信里，富兰克林博士构造了一个幻圆。它的魔幻性质包括：（1）任何径向列的数字加上中心的 12 等于 360，即圆周的度数；（2）同心圆上的数加上中心的 12 等于 360；（3）同心圆内位于水平直径以上（或以下）的数与中心数 12 的一半之和等于 180，即半圆的度数；（4）分别以 *A*，*B*，*C*，*D* 为中心的 20 个偏心圆中的数字加上中心的 12 等于 360；（5）两个相邻同心圆和两个相邻相交部分的 4 个数字加上中心的 12 等于 180。

富兰克林的数学才能似乎靠的是直觉。他曾说美国人口每 25 年将翻一番，几乎是凭空提出这个假设的。看一个例子：1790 年人口普查数字是 3 929 214。根据计算，1890 年的数字应为 62 867 424。实际的数字是 62 947 714，只有 0. 13% 的误差。



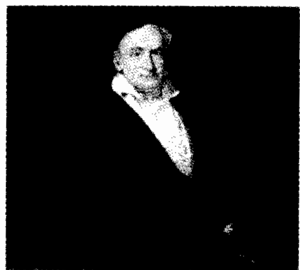
并将其刻于此桥。

318° “小巨人”

弗比尼（Chirin Guido Fubini，1897～1943）是射影微分几何的意大利学派领袖，晚年在普林斯顿高等研究院度过。他在那儿得到“小巨人”的绰号，因为他身材小而头脑大。

都知道弗比尼有三个最爱：爱家、爱数学、爱教书。儿子吉诺（Gino）讲过一个故事，说明他父亲在生命的最后一刻还念念不忘他的三爱：1943 年6 月6 日，弗比尼病入膏肓，吉诺请他解一道数学题。“小巨人”立刻沉浸到方程和计算，暂时忘了病痛，很快就清晰地解决了问题。过了一会儿他就死了。

高　斯


高斯（1777～1855）

高斯是 19 世纪最伟大的数学家，还与阿基米德和牛顿并称为有史以来的三大数学家。他 1777 年生于布伦瑞克。父亲是辛勤的劳动者，坚决反对孩子接受适当的学校教育；母亲尽管没上过学，还是想尽办法鼓励儿子好好学习。15 岁时，高斯在布伦瑞克公爵的资助下考进了那儿的学院。三年后，还是在公爵帮助下，他进入哥廷根大学。此后，高斯一生都在哥廷根，住在那儿的天文台。他很少出门旅行，从没离开过德国。他有惊人的数学头脑，却没发表多少东西——但发表的都是最高质量的，有着令人钦美的完美和数学的精妙。1855 年，高斯在哥廷根去世。

319° 高斯的早熟

高斯很小的时候就显露了惊人的对数的敏感，两岁就成了“神奇儿童”。有几个经常说起的故事，说明了小孩儿的非凡才能。

故事说，一个星期六的晚上，高斯的父亲在整理一周的劳力花名册（他夏天经营了一家砖厂）。父亲没想到三岁的小儿子正专心地跟着他一起算呢，当他最后听小孩儿说他算错了，应该如何如何时，非常惊讶。他复核了数字，证明孩子对了。在以后的星期六晚上，孩子就站在高高的凳子上，帮父亲算账。高斯后来也喜欢讲这个故事，还笑谈他会说话之前就会算术了。

另一个故事发生在高斯上学的时候，他大约 10 岁。在算术课的第一次班会上，巴特纳（Buttner）校长要同学们写下 1 到 100 的数字，然后把它们加起来。那时，学生都有一块题板，竞赛时各人把答案写在题板上，放到老师的桌上。巴特纳刚把习题说完，小高斯就把题板扔到他桌上了。其他同学还埋头苦算时，卡尔已经叉着双手，在老师轻蔑和讥讽的眼光下坐着呢。下课时，老师查阅了题板，发现只有卡尔一个人的答案是正确的。提问时，卡尔才解释了他是如何得到结果的。他说，“$100+1=101$，$99+2=101$，$98+3=101$，等等，我们把 100 以内的数都这样‘配对’，于是答案是 $50\times101=5050$。”

320° 差点儿陨落的天才

在阿基米德和牛顿盛名远播之前，很有可能遭遇过意外事故。高斯的儿童时代就发生过这样的事情。有一年春天，流经他家门前的运河涨水，在河边玩儿的他落水了，碰巧，那时有个过

路的劳工把他救了起来。

321° 高斯是如何皈依数学的?

尽管高斯很小就表现了对数学的喜爱，但那并不一定说他会

正 17 边形的画法

以数学研究为一生的事业，因为他还有语言天赋，而且认真考虑过研究语言学。不过，1796 年 3 月 30 日发生的一件事情，决定了高斯选择数学。那天，正好是他 20 岁生日前一个月，高斯得到一个惊人的发现：具有素数个边的正多边形，当且仅当其边数 p 为形如 $2^{2^n}+1$ 的素数时，才可能用直尺和圆规画出来。古希腊人已经知道如何用规尺作边数为 3、4、5、6、8、10 和 15 的正

多边形。如果在 $p=2^{2^n}+1$ 中令 $n=0$ 和 1，我们分别得素数 3 和 5——这是古希腊人知道的例子。对 $n=2$，我们得 $p=17$，也是一个素数。于是，高斯证明了可以用圆规和直尺作出正 17 边形，这是古希腊人所不知道的。高斯为这个发现深感自豪，他说，这促使他选择了数学而不是哲学作为终生的事业。

据说，高斯也学阿基米德的作风，要求在他的墓碑上铭刻正 17 边形。尽管他的遗愿未能实现，在他出生地的布伦瑞克，我们在他的纪念碑底座上还能看到那样的正 17 边形。

322° 高斯和他的花鸡

一天，几个朋友坐在高斯家里讨论动物的智力。在座的有一个年轻的古典语言教授波德（George Heinrich Bode），他在这方面有很多奇闻轶事。他特别讲了一只多才多艺的鹦鹉的故事。那是他在美国旅游时得到的，后来带回了德国。鹦鹉聪明极了，波德叫它“苏格拉底”。高斯静静地听他赞美那只鹦鹉，最后听他说苏格拉底还能回答希腊语的问题。这时，高斯笑着说，虽然他从未给自己的宠物花鸡“汉茜”（Hansi）教过半句希腊语，但他让小鸟学会了他带布伦瑞克口音的几个单词，而且能机灵地运用。高斯举例说，就在几天前，他在鸟儿面前举着一支雪茄和一个烟斗问，“汉茜啊，我该吸哪个呢?”汉茜想了一会儿，用德国的低地方言回答说，“烟斗。”

323° 高斯和语言

高斯学语言得心应手。他对语言的追求远非业余爱好，而是通过掌握新语言来检验他的思维活力是不是随年纪一起衰老了。他认为这种联系能保持思想的年轻。62 岁时他开始自学俄语。



两年后，他就能随意阅读和自由交谈了。

324° 高斯的科学日记

高斯发现能用圆规和直尺画正 17 边形那天（也就是他决定选择数学而非哲学为终身事业那天），开始了他的科学日记（即 *Notizenjournal*）。这部日记共 146 则，是数学史的珍贵文献，因为它说明了高斯很早就得到了许多发现，它们通常要过很多年以后才被别人发现和发表出来。

日记的第一则记录了正多边形的发现。

1796 年 6 月 10 日的日记读起来像天书：

$$\Sigma\Upsilon\mathrm{PKA!}\qquad \mathrm{num} = \Delta + \Delta + \Delta$$

这让我们想起了阿基米德的胜利的呼叫“Eureka”，而那个简写的公式是说，每个正整数都是 3 个三角数之和。（三角数是形如 $n(n+1)/2$ 的数，其中 n 为非负整数。）这不是随便几笔就能证明的。

1796 年 10 月 11 日的日记是

Vicimus GEGAN，

而 1799 年 4 月 8 日是

REV. GAN

那么多年过去了，这两则日记还是未解之谜。

除了上面的两则而外，其余日记大都是清楚的。1797 年 3 月 19 日的日记说明，高斯那时（还不到 20 岁）已经发现了某些椭圆函数具有双周期性，后来的一则日记又说明他已经认识到了一般情形的双周期性。假如发表了，单凭这个发现就能为他赢得数学荣誉。可高斯从未发表它！

325° 不太可信的故事

高斯一次又一次地守着他的惊人发现而不拿去发表，他为什么那么做?

鲍尔在他引人入胜的数学史中重复的一种解释说，高斯曾把他的第一部大作《算术研究》(*Disquistiones arithmeticae*) 的大部分内容作为研究报告提交法兰西科学院，却被草率地拒绝了。这令高斯感到耻辱，于是决定永远不再发表东西了，除非作品在内容和形式上都能通过所有的批评。

现在发现，根本没有那样败坏名誉的事情。1935 年，法国科学院官员证实，通过对科学院记录的彻底检查，《算术》根本就没有提交给科学院，当然谈不上拒绝了。

事实也许正如高斯自己说的，他做数学和科学探索只是为了满足天性的渴求，听别人的话发表结果是无关紧要的事情。而且，他那时思如泉涌，还不到 20 岁，只能斟酌和完成很少的一部分。

326° 高斯的图章和座右铭

高斯在科学写作中是一个完美主义者。他说，只有把脚手架拿走了，大教堂才能成其为大教堂。他力求每篇作品都完整、简洁、优美和有力，而把他得到结果的分析过程都抹去了。于是，他用只有几个果子的树作为自己的图章，上面写着他的座右铭: *Pauca sed matura*。(“少，但熟了。”)

327° 全世界最伟大的数学家

洪堡 (Alexander von Humboldt) 问拉普拉斯谁是德国最伟大

的数学家，拉普拉斯回答：“法夫（Pfaff）。”

“那么高斯呢？”洪堡吃惊地问。

“高斯，”拉普拉斯解释说，“是全世界最伟大的数学家。”

328° 高斯与勒索者

1807年法国入侵德国，侵略者向居民大肆勒索，穷人根本承受不起。于是命令高斯向拿破仑的军队捐款2000法郎，远远超出了他的能力。高斯的天文学家朋友奥尔伯斯（Olbers）听说这笔罚款后，把钱寄给他，并对像高斯那样的大学者受到如此敲诈表示愤慨。高斯感谢了朋友的慷慨和同情，但谢绝了他的钱，立刻还给了他。不久，高斯从著名法国数学家拉普拉斯那儿收到一张友好的便条，告诉他已经替他交了2000法郎的罚款，并为此感到荣幸。因为拉普拉斯在巴黎交了钱，高斯无法还钱，但他最终还是拒绝了帮助。那时，大家都知道高斯不愿受人恩惠，于是他的一个崇拜者匿名从法兰克福给他寄来1000金币。高斯不知礼物来源，也就无法拒绝了。但他用这些钱还了拉普拉斯在巴黎为他付的2000法郎。

329° 高斯宣言

有一次，人们问高斯，他是如何取得那么多高水平成就的，高斯回答，“假如别人也和我一样深入而持续不断地思考数学问题，他们也能做出我的发现。”我们还记得，牛顿在回答关于他如何获得超越前人的发现的类似问题时，曾说，“通过不停地思考。”看来，伟人之所以取得惊人的成就，部分原因无疑是在于他们能长时间地全神贯注于要解决的问题。

330° 科学史上最大的灾难

高斯对阿基米德佩服得五体投地，但不明白他怎么没能发明位置计数法。在高斯看来，阿基米德的这一点疏忽是科学史上最大的灾难，不禁感叹："如果阿基米德有了那个发现，今天的科学该到达怎样的高度啊！"

331° 高斯与司各特

司各特（Sir Walter Scott）每出一本书，高斯就如饥似渴地读。在一部小说中，司各特犯了一个天文学错误，"月亮从西北方圆圆升起"。这个疏忽激起了高斯的兴趣，他四处奔走，把能找到的书都改正过来了。

几个小人物

数学史上也不乏那样的例子，小人物因为某一个不那么重要的贡献而赢得了一定的名声。例如，费尔巴赫和他的美妙定理（315）、维也纳的中学校长菲克尔和他倒霉的因子表（314）、意大利人拉泽里尼和他那奇妙的用概率计算的 π(290) 以及我们说过的其他一些人和事情。这一节里我们再看几个那样的"小"人物。

332° 加菲尔德总统和毕达哥拉斯定理

美国有几个总统和数学有点儿瓜葛。华盛顿（George Washington）是著名的土地调查员，杰斐逊（Thomas Jefferson）大力倡导在美国实行高等数学教育，林肯（Abraham Lincoln）则通过欧几里得《原本》来学逻辑。更有创造性的是第 20 任总统加菲

尔德（James Abraham Garfield，1831～1881），他在学生时代就对初等数学产生了浓厚的兴趣，也表现了相当的才能。1876 年，在出任美国总统 5 年之前，他还是众议员时，就独立发现了毕达哥拉斯定理的一个非常漂亮的证明。他是在和国会其他议员讨论数学时，偶然发现这个证明的，后来印在了《新英格兰教育杂志》上。学几何的中学生都愿意看到这样的证明，只要想到梯形面积公式，立刻就能得到结果。证明在于以两种不同的方法计算图 39 的梯形面积——先计算梯形的面积（两个平行边长之和乘以其垂直距离的一半），然后计算梯形分解的三个直角三角形面积之和。这样得到的两个梯形面积相等，从而有

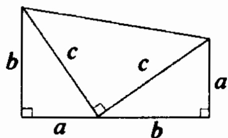


图 39

$$(a+b)(a+b)/2=2[(ab)/2]+c^2/2$$

即

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

因此

$$a^2+b^2=c^2$$

由于对任意直角边为 a 和 b、斜边为 c 的直角三角形都存在这种梯形，这就确立了毕达哥拉斯定理。

333° 荣誉的角落

符号 π 被英国早期数学家奥特雷德、巴罗和格里戈利（David Gregory）用来记圆的周长。第一个用它来记圆周长与直径之比的是英国作家琼斯（William Jones，1675～1749）在 1706 年出版的一本书里。然而，直到 1737 年欧拉采用之后，它才流行开来。

符号 $n!$，所谓 n 的阶乘，代表乘积

$$(1)(2)(3)\cdots(n-2)(n-1)(n),$$

是斯特拉斯堡的柯兰普(Christian Kramp, 1760 ~ 1826)在1808年引入的。他选择这个符号,是为了克服以前符号遇到的印刷困难。

在琼斯和柯兰普的数学作品和贡献中，上面的那两个无疑是后人惟一能记得的东西。

有趣的是，柯兰普用感叹号来表示阶乘，引出了组合数学里的一个相关符号。1878年，惠特沃斯（W. A. Whitworth）引入了 n 的“亚阶乘”，定义为

$$n!\,[1-1/1!\ +1/2!\ -\cdots+(-1)^n/n!]$$

如果我们打乱 n 个物体的排列，使得没有一个物体在它原来的位置，则亚阶乘代表了有多少种打乱的排列方式。惠特沃斯用符号 $\lfloor\!\lfloor \underline{n}$ 记亚阶乘（因为符号 $\lfloor \underline{n}$ 已经用来记阶乘了）。爱丁顿大学的克里斯托(George Chrystal, 1851 ~ 1911)在他著名的《代数教程》(1889)第二卷里建议了一个更方便的记号 n¡,从此就流传下来。

334° 迟来的荣誉

19世纪后半叶的一个著名几何问题是寻求画直线的连杆机械。终于在1864年，法国军官皮奥塞里尔（A. Peaucellier, 1832 ~ 1913）找到了一种方法，而这发明是由他的工程师哥哥曼海姆(A. Mannheim, 1831 ~ 1906，他也是所谓“曼海姆滑尺”的发明者）在1867年巴黎数学爱好者协会的一个会上宣布的，但没人注意。直到俄罗斯著名数学家切比雪夫（Chebyshev, 1821 ~ 1894）的年轻学生李普金(Lipkin)在1871年独立发明了同样的机械,人们才想起它来。李普金从俄罗斯政府获得了大奖,这样,皮奥塞里尔的发明也最终被确认,获得法兰西学院的杰出机械奖。

皮奥塞里尔的仪器包括7节。1874年，哈特（Harry Hart, 1848 ~ 1920）发现了5节的直线连杆，但从此没人能把节数减

少，或证明是否还能减少。现在已经证明，存在画任意给定代数曲线的连杆机械，但不可能有一种连杆机械能画任意超越曲线。

335° 一个著名猜想

有许多和素数有关的未证明猜想，其中之一是哥德巴赫（Christian Goldbach，1690～1764）1742年在给伟大的瑞士数学家欧拉的一封信里提出的。哥德巴赫发现，除2外，每个偶数似乎都能表示为两个素数之和。例如4=2+2，6=3+3，8=5+3，…48=29+19，…，100=97+3，等等。尽管欧拉把他非凡的才能投入到了这个问题，终究还是没能解决它。实际上，问题直到今天也难征服，虽然最近有过一些进展。1931年，苏联数学家施涅尔曼（L. Schnirelmann，1905～1938）证明，每个正整数、素数或合数，都能表示为不超过300 000个素数之和！稍后，苏联数学家文诺格拉多夫（I. M. Vinogradoff）证明，存在一个正整数N，使任意大于N的整数都能表示为至多4个素数之和，但他的证明不能让我们估计N的值。

哥德巴赫好像是一个勤勉的通信者，赢得了当时许多顶尖数学家的尊重。例如，欧拉就是在1746年给哥德巴赫的一封信里第一次公布了他的重要发现：i^i（这里$i=\sqrt{-1}$）是一个实数。但是在今天，数学史提起哥德巴赫都只说他那个了不起的猜想。

336° 张冠李戴

在数学中，我们常看到以发现者名字命名的定理、过程、曲线或其他数学概念。但在许多情况下，名字往往被弄错了，应该归于更早的真正的发现者。一个例子是在当时有一定名气的苏格兰物理学家和数学家普莱菲尔（John Playfair，1748～1819）。

1795 年，他编辑了一版欧几里得《原本》，其中欧几里得原来复杂而冗长的平行公设被改写为简洁明了的等价形式："通过一给定点能且只能作一条线平行于已知直线。"这种表述被称为普莱菲尔公设，也是大多数现代中学几何课本采用的平行公设。普莱菲尔的名字几乎就凭这个表述流传到今天。

然而，本质上说，普莱菲尔的表述形式，更早是芬恩（Joseph Fenn，在他的都柏林版《原本》）和鲁德兰姆（William Ludlam，在他的《数学初阶》）分别在 1769 年和 1785 年提出来的。实际上，这种形式的公设，早在公元 5 世纪就由普洛克拉斯（Proclus）在他的《欧几里得评论》第一卷里提出了。过了 1300 多年才因为一个公设的表述赢得名声，似乎多少有点儿可怜！

哈米尔顿与哈代

337° 爱国者、神童、爱动物的人

哈米尔顿（Sir William Rowan Hamilton，1805～1865）绝对是



哈米尔顿（1805～1865）



爱尔兰最有名的数学家，他还是炽热的爱国者，从小就立志为国增光。晚年成为有世界声誉的数学家之后，他常说，世纪之初人们读法国数学，但到了世纪之末，他们在读爱尔兰数学了。

小时候，哈米尔顿是非凡的神童。在一个叔叔的监护下，小小年纪的他就掌握了数量惊人的语言。三岁时，他英语超群，算术飞速进步；四岁时，地理出色；五岁时，学会了拉丁文、希腊文和希伯来文；八岁时，又学了意大利文和法文，能用拉丁文即兴演说；十岁时，开始学东方语言，先学会阿拉伯文和梵文，接着很快又学了大量其他东方语言。十四岁时，他用波斯文写了一首华丽的欢迎波斯大使的诗。

不过哈米尔顿最令人赞赏的也许是他对动物的珍爱。他不仅爱动物，而且还少有地像尊重人那样地尊重动物。

338° 访问数学圣地

[下面的小故事是新泽西洛文（Fair Lawn）高级中学的阿伊东（Joseph Ayton）讲的，这儿经允许引自 1969 年 10 月号《数学教师杂志》“历史讲述”专栏。]

去年夏天我在爱尔兰度假。想起哈米尔顿发明的四元数的非对易乘法，我决定去找找都柏林的那座桥。根据卡约里《数学史》的记述，那是皇家运河上的布鲁厄姆（Brougham）桥。几经找寻，我找到它了，还拍了照片。

数学老师都知道，哈米尔顿为四元数乘法用了 15 年的工夫。有故事说，一天傍晚，他正和夫人散步在黄昏的运河畔，突然脑海里灵光闪现。身边没带纸笔，他就拿出小刀，把他那非正统的乘法刻在布鲁厄姆桥的石头上。历史学家认为，非对易代数的发明是一座里程碑，把代数学从传统模式中解放了出来，打开了现

代抽象代数学的闸门。

在桥上我没能找到原来的刻字（我甚至怀疑桥已经不是原来的，1843 年以来可能重修了，因为它不仅横跨运河，还有铁轨）。不过，石头上嵌着一块水泥牌匾，叙说了那个故事（图 40）。

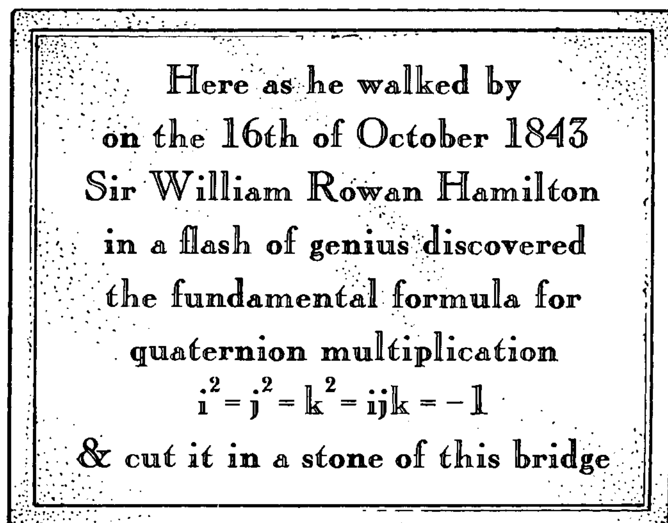


图 40　1943 年 10 月 16 日，哈米尔顿漫步于此时灵光闪现，发现了四元数乘法的基本公式 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

布鲁厄姆桥不好找，爱尔兰旅游局在其他方面很能干，在这一点上却留下了空白。他们的人从没听说过布鲁厄姆桥，更不知道哈米尔顿其人。显然，那不是爱尔兰人心目中的旅游胜地。皇家运河上的众多桥梁都不再有各自的名字。都柏林街区图指示了一条跨河街道，离城中心大约 3 英里，名为布鲁厄姆，那正是我要找的。

经过战争蹂躏和岁月沧桑，那块水泥牌匾已不复存在，皇家运河也失去了往日的风光（呸!）。我写信给爱尔兰旅游局，建

议他们应多多关心爱尔兰伟大学者的纪念物。对民族有文化贡献的伟人，至少应该和那些国王和政治家有一样的历史地位。总的说来，我对这次朝圣之旅还是非常满意的。

339° 两个哈米尔顿爵士

[下面的文字经允许采用伊弗斯的同名文章，发表在《数学教师》“历史讲述”专栏，1963 年 5 月，348 ~ 349 页。]

在数学史（其实，也包括任何学科的历史）上，最大的混乱来源，恐怕就是某个权威在无意间造成的永久的事实错误。这些错误又在无意中流传，被后来的作者（他们也许追随原来的权威，也许根据别的追随权威的人）夸大。从事数学史研究的任何人很快都能察觉这种状况，因为那样的谬误几乎无处不在。写数学史的人不可能都从头写起，总会不断引用已有的书面材料。

这方面的一个突出例子就是经常混淆同时活跃在 19 世纪上半叶的两个哈米尔顿爵士（Sir William Hamilton）。一个 1788 年出生在格拉斯哥，1856 年死于爱丁堡。他是苏格兰准男爵，爱丁堡大学逻辑学与形而上学教授，写过大量他那专业领域的重要论文。

另一个哈米尔顿 1805 年出生在都柏林，1865 年死在同一城市。他是都柏林大学天文学教授，发表过大量有高度创见的数学和物理学作品，1835 年封为爵士。这位哈米尔顿爵士更出名的完整名字是 Sir Rowan Hamilton，是四元数计算的创始者，爱尔兰历史上最杰出的数学家。

很容易明白为什么会把两个哈米尔顿混淆了——他们生活在同一时代，有相同的姓名，都有封号，都是大学教授，都写过著

名的著作。令二人更加混淆不清的是，他们都和著名的德摩根有过通信，而德摩根的传记作者们把他们搞混了。英国数学家、逻辑学家和教师德摩根是杰出而多产的作家，与许多人有过通信往来。因为德摩根个人对数学和逻辑学感兴趣，他和爱尔兰的哈米尔顿爵士和苏格兰的哈米尔顿爵士就那些专业的问题有过大量通信。德摩根的传记作者把二人混淆了。这样的混淆还将引人瞩目，例如，在第 11 版《不列颠百科全书》的德摩根条目下，作者就将两个哈米尔顿爵士混同为爱尔兰的哈米尔顿爵士了，把另一个爵士关于逻辑学谓项的量词的作品也归到他的名下。因为《不列颠百科全书》的崇高声誉，这个错误还将延续下去。

340° 平庸的关系

有故事说，20 世纪上半叶英国最重要的数学家哈代（1877～1947）曾在一次演讲中说，某些数学关系是平庸的。迟疑一会儿，他问，“它是平庸的吗?”接着他告辞离开了演讲厅，走进办公室。在办公室考虑了 20 分钟后，他回到演讲厅，宣布说，“是的，它是平庸的。”

有一次，人家问他上面的事情是不是真的，哈代否认了。他说，他只能承认，他可能说过，“这是平庸的，”迟疑一会儿又问，“它是平庸的吗?”接着，又想了一会儿，他说，“是的，它是平庸的。”这不过说明，对许多这样的故事来说，如果谁不想失去它，就不要太在乎它的真假。

341° 博士论文

还有一个关于哈代教授的故事。哈代不太相信博士头衔，也不屑为学生写博士论文推荐信。有一次，一个同学（是一个外

国人）请哈代写一封信，称赞他的论文好，这样他可以拿它当推荐信去找份好工作。哈代拒绝了。“不过，”他说，“你可以把论文拿给里特伍德(Littlewood),他会给你写的。”学生照办了。里特伍德读了论文,确实是篇好文章,他写了信,同学也找到了工作。

342° 最惊人的策略

在他那本美妙动人的小书《一个数学家的自白》里，哈代对数学中广泛运用的归谬法（即间接证明法）做了透彻的分析。他说，“它是比任何棋局更精美的策略：棋手可能表现丢卒保车的妙手，而数学家表现的是整个棋局。”归谬法是我们所能想象的最惊人的策略。

10 个小故事

343° 两次领先的无名作者

18 世纪意大利几何学家和诗人马歇罗尼（Lorenzo Mascheroni，1750 ~ 1800）做出了一个惊人的发现：当给定和所求元素为点的情形，所有规尺作图都能单由圆规完成，从而直尺成为多余的工具。当然，直线不可能由圆规画出，但规尺作图中生成的任何直线都可以单用圆规来找出决定直线的两点。这个发现 1797 年出现在马歇罗尼的《圆周几何》(*Geometria del compasso*)。一般说来,马歇罗尼是通过直线反射的思想得到结果的。1890 年,威尼斯几何学家阿德勒(August Adler, 1863 ~ 1923)发表了用反演变换对马歇罗尼结果的新证明。

接着，意外的事情发生了。1928 年前不久，丹麦数学家杰尔姆斯列夫（Johannes Hjelmslev，1873 ~ 1950）的一个学生在哥

本哈根的一家书店看书时，偶然看到1672年出版的一册丹麦文的老书《欧几里得》（*Euclides Danicus*），是一个叫莫尔（George Mohr）的不出名的作者写的。杰尔姆斯列夫在翻阅这本书时，惊讶地看到它里面有马歇罗尼的发现，早在马歇罗尼发表125年之前，就以不同方法得到了相同的结果。

在马歇罗尼发现的激发下，法国数学家庞色利（Jean-Victor Poncelet, 1788～1867）考虑了单用直尺作图的问题。在这种情形，不是所有规尺作图都能用直尺完成，但奇怪的是，如果在作图平面上有一个圆及其圆心，则所有规尺作图都能单用直尺完成。1822年，庞色利证明了这个非凡的定理，后来，在1833年，瑞士－德国的几何天才斯坦纳（Jacob Steiner）又进一步完善了它。

大约公元980年时，阿拉伯数学家阿布尔－维法（Abû'l-Wefâ, 940～998）提出了用直尺和锈圆规（即圆规的开口是固定的）作图的问题。从庞色利和斯特纳的定理看，其实我们只需要用一次圆规，然后就可以把它扔了。1904年，意大利的色维里（Francesco Severi）更进一步证明，为了单用直尺来完成所有的规尺作图，我们只需要一段圆弧（不论多小）和它的中心。

接着，本世纪刚过一半的时候，又有了一个惊人的历史发现，证明上面提到的那位莫尔还是一本匿名发表的《欧几里得精要》（*Compendium Euclidis Curiosi*）的作者，那书出版于1673年，大致证明了欧几里得《原本》中的所有作图问题都能用直尺和锈圆规完成。于是，这同一个无名的丹麦作者，[14]不但先发现了马歇罗尼的作图定理，还基本上先发现了庞色利和斯特纳的作图定理。

14 莫尔1640年4月1日生于哥本哈根，1662年去荷兰跟惠更斯学数学。1697年在德国去世。



344° 雅可比兄弟

19 世纪 40 年代，有两兄弟 M. H. 雅可比和 C. G. J. 雅可比（Jacobi），哥哥的名声完全压倒了弟弟。M. H. 是一种流行的江湖医术（所谓电镀疗法）的创始者，而 C. G. J. 不过是一个数学家。C. G. J. 常被人错认为他那著名医生的哥哥，很感不平，常宣称“我不是他的兄弟，他是我的兄弟。”历史最终留下了他们的这种关系。今天，M. H. 只是作为 C. G. J. 的哥哥才为人们所知道，而弟弟被认为是历史上的伟大数学家之一，他在生前是德国仅次于高斯的大数学家。[15]

15 两兄弟的其他故事，见《告别数学圈》（A68）。

345° 雅可比的妙语

雅可比（Carl Gustav Joseph Jacobi, 1804～1851）对同时的数学家总是慷慨赞誉。关于阿贝尔的一篇杰作，他说“它远比我说的好，就像比我写的好。”

雅可比是一个出色的老师，他向同学们讲自己的最新发现，是第一个以这种方式培养学生做研究的人。多数学生认为，做研究之前应该先掌握已有的成果。为了纠正同学们的这种偏见，激发他们尽早产生独立研究的兴趣，雅可比常说一个比喻：“假如你父亲在和一个女孩儿结婚前坚持要认识世界上所有的女孩儿，那他就永远不可能结婚，你也就不会出生了。”

雅可比费很大精力做数学，时常损害了健康。他曾回答一个关心他的朋友说，“当然，我有时劳累过度，损害了身体，可那算什么！只有大白菜没心没肺，但它从那种逍遥状态得到了什么呢？”

雅可比赞赏纯粹研究而反对应用研究，他说，“科学的真正

目的是人类思想的荣誉。”

346° 克罗内克与摩根

著名德国数学家克罗内克（1823 ~ 1891）和著名美国金融家摩根（John Pierpont Morgan，1837 ~ 1913），从某种意义说，相互代表了对方的脸面。克罗内克是一个极好的商人，30 岁前就为自己积攒了大量财富；而摩根在德国上学时就表现了卓越的数学才能，他的教授们都想劝他以数学为职业，甚至想为他找一个德国大学的职位。

347° 克罗内克崇敬的人

克罗内克是毕达哥拉斯的信徒，这可以拿他最喜欢引用的一句话来证明：“Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht，alles andere ist Menschenwerk.”[16]（相关的故事见 56。）

16 “上帝创造了整数，其余都是人为的。”

348° 蒙日的浪漫婚姻

法国数学家蒙日（1746 ~ 1818）的婚姻代表了 18 世纪的浪漫。在一个酒会上，蒙日听见一个下流的人正恶毒诽谤一个拒绝他的年轻寡妇。虽然蒙日不认识那个叫霍本夫人（Madame Horbon）的寡妇，这位有着骑士作风的数学家还是站出来训斥了那个诽谤者，甚至要和他决斗。几个月后，在另一个酒会上，蒙日被一个年轻女子的魅力俘获了，经人介绍，才发现她就是他保护过的霍本夫人。两人在 1777 年结婚了。蒙日死后，为了永久纪念他，夫人付出了一切；她也许是惟一陪伴着蒙日走过一生沧桑的人。



349° 战俘带回来的礼物

庞色利是法国军队的军官，拿破仑从莫斯科溃败时曾被俄罗斯俘虏。在两年的囚徒生活中，庞色利手头一本书也没有，却筹划着他的射影几何的巨著。1822 年，他刚被释放回到法国，书就在巴黎出版了。这部著作真正代表了射影几何的复兴，极大促进了对这门学科的研究，开创了所谓射影几何的“黄金时代”。

庞色利从俄罗斯解放回法国时，还带回了别的东西。从 1100 年到 1500 年是算盘与计算争锋的时期，一方支持用算盘，另一方则宣扬印度 - 阿拉伯的数字系统。到 1500 年时，我们今天的计算法则赢得了至高无上的地位，而在接下来的 100 年里，算盘差不多被完全遗忘了。到 18 世纪，在西欧已经找不到算盘的任何痕迹了。算盘作为珍玩而重新出现，要归功于庞色利，他从俄罗斯带了一把算盘回法国。

350° 泊松从摇摆学会了什么？

泊松（Denis Poisson，1781 ~ 1840）出生在法国比提维斯（Pithiviers），后来成为应用领域的顶尖数学家。小时候，他由一个护士照看。一天，父亲（一个普通士兵）来看他，护士正好出去了，用吊带把他悬在墙上的钉子上——护士说这是为了远离地板的病菌和尘土。泊松说，像这样吊在空中，前后摇摆，就像玩儿体操一样。他就这样从小熟悉了摆，而摆的研究在后来占据了他一生的很多时间。

351° 泊松看钱

有故事说，1802 年，一个要去当兵的年轻人求泊松替他看

好他的钱袋。泊松那时正忙着，就告诉年轻人把钱放在架子上。年轻人照着做了。为了把钱藏好，泊松在钱袋上盖了一本霍拉斯（Horace）的书。20 年后，那人当兵回来，问泊松要钱。泊松已经忘了。

“你说你把钱放我手上了？”泊松问。

“不,”士兵回答，“我把它放在那个架子上了，你还放了本书在上面。”

士兵拿开布满尘土的霍拉斯的书，看到钱袋还在 20 年前他放的地方。

352° 为什么没有诺贝尔数学奖？

几个重大研究领域都有诺贝尔奖，但没有数学奖。原因很有意思。瑞典大数学家米塔格 - 莱夫勒（G. M. Mittag-Leffler，1846 ~ 1927）曾经是很富有的人，在挣钱的过程中，他得罪了很多的人，特别就有诺贝尔（Alfred Nobel）。诺贝尔为物理学、化学、生理学或医学、理想主义文学作品和世界和平事业的最优秀者设立了年度大奖。设立奖项时，数学也在考虑中。诺贝尔问他的顾问们，是否该设数学奖？在他们看来，米塔格 - 莱夫勒可能获奖吗？因为米塔格 - 莱夫勒那么能干，名声又那么大，顾问们都承认他很有可能获奖。“那么，就不设数学奖了吧。”诺贝尔决定。

西尔维斯特与维纳

下面讲几个西尔维斯特（J. J. Sylvester，1814 ~ 1897）和维纳(Norbert Weiner，1894 ~ 1964)的故事，来结束我们在数学圈的第一周旅程。他们二人是数学史上最有色彩的数学家，光是他们

的故事就能写出一本小册子。因为时间久远，有些故事已经被添油加醋了——但其精神仍然表现了二人的个性特征。

因为材料很多，我们至少还能再度或三度环游数学圈，也许在未来某个闲暇的时候，我们可以再多讲一些数学的故事和传说。

353° 西尔维斯特的记忆力

凯莱和西尔维斯特是多年的数学朋友，但在各方面几乎都形成鲜明的对比。其中记忆力就是突出的一点。凯莱似乎能过目不忘，而西尔维斯特甚至不能记住自己的数学发现。有一次，西尔维斯特反驳一个同行的数学论断，坚持认为从没听人说过，也根本不可能是对的。于是，同行给西尔维斯特拿出一篇他本人写的论文，里面就有相关的发现，还有他写的证明。

354° 西尔维斯特在弗吉尼亚大学

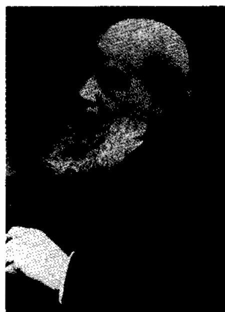
1841 年，西尔维斯特接受了美国弗吉尼亚大学数学教授的职位。27 岁的他满怀青春热情地走上新岗位，根本没想到三个多月后他就将痛苦地结束这段历程。

不久就发现，有些学生憎恨教师队伍里有外国人和犹太人，西尔维斯特教授开始在课堂上遭罪了。终于，在经历了三个月的痛苦折磨后，西尔维斯特向学校报告了一个叫巴拉德（W. H. Ballard）的人在课堂上对他的无礼冒犯。巴拉德在西尔维斯特不在场时被传去诉说情由，他的说法和西尔维斯特的报告大相径庭，而且还得到了他的伙伴维克斯（W. F. Weeks）的支持。一听到这些偏向的证词，西尔维斯特就表示抗议，他奇怪为什么不找一个更中立的学生来作证。应西尔维斯特的要求，又举

行了这样的听证会，但似乎都支持巴拉德的说辞。关于这一点，教授委员会的记录语焉不详。不过，也许因为西尔维斯特发觉了自己与学生和老师都不和，而教授委员会也不做明确结论，令他痛苦和失望，于是他提出无条件辞职。辞职被批准了，西尔维斯特离开了弗吉尼亚。他来到纽约，那儿有个兄弟；过了一年，他也没在美国找到好的工作。最后，身无分文的他回到了英国。

355° 西尔维斯特在约翰霍普金斯大学

可能有人想，1841 年西尔维斯特在美国遭遇了那么大的苦难，应该厌倦那个国家了吧。可他在 1876 年又再次横跨大西洋，这次是来巴尔的摩新建的约翰霍普金斯大学。他在这儿过了七年，是他一生最快乐也最有成果的七年。就在这个地方，他在 1878 年创办了《美国数学杂志》。

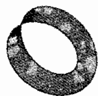


西尔维斯特

西尔维斯特在约翰霍普金斯的经历有许多愉快而多彩的故事，下面的故事是富兰克林博士讲的（他是西尔维斯特在霍普金斯大学的数学教授继任者，也是故事的见证人），说明了西尔维斯特对诗歌和诗歌格律的强烈兴趣。

“他［西尔维斯特］除了创作大量诗歌而外，还精美地翻译了一些荷拉斯和德国的诗歌。他那押韵的杰作，是在巴尔的摩表演的，原是为了说明他在《诗律》一书里讲的作诗理论。他在皮博迪（Peabody）学院[17]读他的罗莎琳（Rosalind）诗，真是一场有趣的心不在焉的表演。全诗 400 多行，都以罗莎琳的名字为韵（i 音可长可短）。大厅里座无虚席，都想从这场独特的诗歌实验里找到乐趣。但西尔维斯特教授发现有必要写出大量的解释性脚注，他宣布，为了不中断诗歌，他先把脚注读一遍。而几乎每个脚注都需要另外当场解说一番，于是，朗读者沉浸在一个个

17 皮博迪（Peabody）学院是慈善家 George Peabody（1795～1869）创办的众多博物馆和图书馆之一。



脚注里，几乎忘了时间，也忽略了听众的兴趣。当他解说完最后一个脚注时，一看表，才可怕地发现他让大家听了一个半钟头的解说，而他们想听的诗歌正文还没开始呢。他一脸惊讶，而听众们爆发出欢快的笑声。接着，他请大家原谅，有事的人尽可自由离开，然后开始读他的罗莎琳。”

356° 西尔维斯特论音乐和数学

西尔维斯特能敏锐地感觉数学与艺术的亲密关系，常在作品中表达这种关系。于是，在他的一篇题为“求虚根的牛顿法则”的文章里，在一个脚注里指出，“难道音乐不能描述为数学的感觉，而数学为音乐的理性吗？它们的精神是一样的！所以，音乐家感受数学，而数学家思考音乐——音乐是梦幻，数学是现实的生活——都从彼此获得圆满。当人类理性趋于圆满，将照亮统一的莫扎特和狄利克雷或贝多芬和高斯——而这样的统一，在赫姆霍兹的天才和辛劳里，已经显现出来了。”



357° 维纳和他的汽车

多年来，维纳是麻省理工学院的著名数学教授，似乎也是行为古怪、智慧超群而漫不经心的教授典范。许多故事都说明了这些特征。一个故事说，他有一次驱车去纽黑文参加耶鲁大学的一个数学会议。大会结束时，他忘了是开车来的，就搭公车回剑桥了。第二天早晨，他去车库开车，车不在了，于是报警说，他去纽黑文开会时有人把他的车偷走了。

358° 维纳与学生

常听一个故事说，维纳在麻省理工学院（MIT）校园遇到一个学生，学生跟他打招呼，问他一个问题。维纳费了好长时间来回答和解释。最后，教授困惑起来，回头问那学生，“你还记得，我们刚才见面时，我是朝哪个方向走的吗？”[18]

18 后来的故事见《相约数学圈》（S106）。

359° 维纳在会上

大家都知道维纳常在开会的时候睡觉，等人家话讲完了，他也醒了，然后发表相关的评论。在一个会上，麦克莱恩（Saunder Maclane）教授谈了一些关于代数的问题。就在谈话结束的时候，麦克莱恩对着睡觉的维纳大声说，“于是我们看到，这个主题绝对与各态历经理论无关。”维纳马上醒来，开始大谈各态历经理论。[19]

19 “各态历经”是统计理论的名词，说的是一个随机过程，只要经历足够长的时间，就会经历所有可能的状态；换句话说，如果了解了足够多的状态，就能确定过程的特征。

360° 维纳在教室

一天，给本科生上课时，维纳教授的学生问他一道题怎么



解。他思考片刻，把答案写在黑板上，全班都感到困惑，一个大胆的同学问，“可是维纳教授，还有别的解法吗?”教授又沉思片刻，然后豁然开朗，说，“是的，当然有啊。”把同样的解法又写了一遍。